量子のツブヤキ

無名のヒト

記号と単位系

・記号
　ｃ：光速
　ｍ：慣性質量
　ｔ：時間
　τ：固有時間（ｄτ＝ｄｔ／γ）
　π：円周率
　ｉ：虚数単位　√（－１）

　μ＝０，１～３
　ｊ＝１～３
　Ｘμ：４元位置ベクトル
　Ｕμ：４元速度ベクトル
　Ｖｊ：３元速度ベクトル
　Ｐμ：４元位置ベクトル
　ϕ（Ｘμ）：スカラー汎関数（演算子）
　$\phi\nu$（Ｘμ）：ベクター汎関数（演算子）
　Ｈ：ハミルトン演算子
　exp()：指数関数

　Ａ^２＝Ａ・Ａ
　［Ａ，Ｂ］＝ＡＢ－ＢＡ
　｛Ａ，Ｂ｝＝ＡＢ＋ＢＡ

　Ｓ，Ｓ’　：慣性系
　Ｖ：相対速度
　tanhθ＝β＝Ｖ／ｃ
　γ＝１／√（１－β^2）
　$\sigma\mu$：パウリ行列

・単位系
　プランク定数ｈ＝２π

愛子：「これだけ？まったく不親切だわ。」
孫子：「余計なことが書いてないないから、シンプルでいいよ。」
光子：「これから何が始まるの？」
老子：「量子って誰の名前？」
草子：「ネコの名前にして変な感じ。」
良子：「私は「りょうこ」じゃなくて、よしこよ。」

［Ｘｊ，Ｖｊ］＝？

交換関係　［Ｘｊ，Ｐｊ］＝ｉ
Ｐｊ＝ｍＵｊ＝ｍ・γ・Ｖｊ＝Ｐ0・Ｖ／ｃ
Ｐ0＝ｍ・γ・ｃ
β＝Ｖｊ／ｃ

ｉ・Ｖｊ／ｃ＝［Ｖｊ，Ｐ0］　：ハイゼンベルク方程式
から、
［Ｘｊ，Ｐ0・Ｖｊ］／ｃ
＝（［Ｘｊ，Ｐ0］Ｖｊ＋Ｐ0［Ｘｊ，Ｖｊ］）／ｃ
＝（ｉ・Ｖｊ^2／ｃ＋Ｐ0［Ｘｊ，Ｖｊ］）／ｃ
＝ｉ

［Ｘｊ，Ｖｊ］＝ｉ・（ｃ－Ｖｊ^2／ｃ）／（ｍγｃ）
＝ｉ・（（１－（Ｖｊ／ｃ）^2）^(3/2)）／ｍ

Ｘｊ：「Ｖｊ／ｃ＜＜１のとき、ｉ／ｍになるから、Ｐｊ＝ｍ・Ｖｊの場合と同じね。」
Ｖｊ：「でも、Ｖｊ＝ｃ、またはｍ→∞で、ゼロで交換関係が消失するってこと？」
ｉ：「Ｖｊ→０では不成立だよ。」
Ｐ0：「他に、何かご意見は？」

$i \cdot d\phi / d\tau = (m \cdot c^2)\phi$

Let’s 計算

$$
\begin{aligned}
& i \cdot d\phi / d\tau \\
&= i \cdot (dX0/d\tau) \cdot (\partial\phi/\partial X0) + i \cdot (dXj/d\tau) \cdot (\partial\phi/\partial Xj) \\
&= (U0P0 - UjPj)\phi \\
&= ((P0^2 - Pj^2)/m)\phi \\
&= (m \cdot c^2)\phi
\end{aligned}
$$

$\phi \propto \exp(-i(m \cdot c^2) \cdot \tau)$

・S系

$i \cdot d\phi/dX0 = i \cdot (\partial\phi/\partial X0) + [\phi(Xj), P0]$

$= ((m \cdot c)^2/P0)\phi$

cf）

$[\phi(Xj), P0] = [\phi(Xj), \sqrt{}(Pj^2 + (m \cdot c)^2)]$

$= i \cdot (Pj/P0) \cdot (\partial\phi/\partial Xj)$

$[Xj, \sqrt{}(Pj^2 + (m \cdot c)^2)]$

$= i \cdot (Pj/P0)$

$i \cdot d\phi/dt = ((m \cdot c^2)^2/H)\phi$

$i \cdot d\phi/d\tau = (dX0/d\tau) \cdot ((m \cdot c)^2/P0)\phi$

・S’系

$i \cdot d\phi'/dX'0 = i \cdot (\partial\phi/\partial X'0) + [\phi(X'j), P'0]$

$i \cdot (\partial\phi'/\partial X'0)$

$= (\cosh\theta \cdot P0 - \sinh\theta \cdot Pj)\phi$

$[\phi(X'j), P'0]$

$= (\sinh\theta \cdot Pj - \cosh\theta \cdot ((Pj)^2/P0))\phi$

$i \cdot (\partial\phi'/\partial X'0) = (m \cdot c)\phi'$

$dX'0/d\tau = c$

ｍ：「アインシュタインの有名な関係式の量子バージョンだ。」

ϕ：「質量ｍがあるとϕが時間的に変化するってことよね。」

τ：「ϕとＰ0の交換関係を計算するときにはＸ０を一定にしないといけない。」

ｃ：「Ｓ系で$d\phi/dX0 = 0$の場合、$i \cdot \partial\phi/\partial X0 = ((Pj)^2/P0)\phi$になる。」

Ｘｊ：「$i \cdot \partial/\partial X0$はＰ0のことだから、$(P0)^2 = (Pj)^2$で、$P0 = \pm Pj$だ。」

Ｐ0：「ｍはどこへいったんだ！」

ｃ：「そんなの、気にしないでよ。」

Ｕ0：「$P0 = -\sqrt{}(Pj^2 + (m \cdot c)^2)$のことを忘れるでない。」

ｉ：「この際、過去のことは置いときましょう。」

軌道角運動量ＫとスピンＳ

［Ｐjσj，Ｘkσk］の計算

［Ｐ1σ1，Ｘ1σ1＋Ｘ2σ2＋Ｘ3σ3］
＝［Ｐ1，Ｘ1］σ1^2
+Ｐ1Ｘ2［σ1，σ2］+Ｐ1Ｘ3［σ1，σ3］
＝－ｉσ0＋２ｉＰ1Ｘ2σ3－２ｉＰ1Ｘ3σ2

［Ｐ2σ2，Ｘ1σ1＋Ｘ2σ2＋Ｘ3σ3］
＝［Ｐ2，Ｘ2］σ2^2
+Ｐ2Ｘ1［σ2，σ1］+Ｐ2Ｘ3［σ2，σ3］
＝－ｉσ0－２ｉＰ2Ｘ1σ3＋２ｉＰ2Ｘ3σ1

［Ｐ3σ3，Ｘ1σ1＋Ｘ2σ2＋Ｘ3σ3］
＝［Ｐ3，Ｘ3］σ3^2
+Ｐ3Ｘ1［σ3，σ1］+Ｐ3Ｘ2［σ3，σ2］
＝－ｉσ0＋２ｉＰ3Ｘ1σ2－２ｉＰ3Ｘ2σ1

∴［Ｐjσj，Ｘkσk］
　＝－３ｉσ0
＋２ｉ（Ｐ2Ｘ3－Ｐ3Ｘ2）σ1
＋２ｉ（Ｐ3Ｘ1－Ｐ1Ｘ3）σ2
＋２ｉ（Ｐ1Ｘ2－Ｐ2Ｘ1）σ3

Ｐ2Ｘ3－Ｐ3Ｘ2＝－Ｌ23＝－Ｋ1
Ｐ3Ｘ1－Ｐ1Ｘ3＝－Ｌ31＝－Ｋ2
Ｐ1Ｘ2－Ｐ2Ｘ1＝－Ｌ12＝－Ｋ3

［Ｐjσj／２，Ｘkσk／２］
　＝－（３／４）ｉσ0
－ｉ（Ｋ1σ1／２＋Ｋ2σ2／２＋Ｋ3σ3／２）
＝－ｉ（σ1／２）・（Ｋ1+（１／２）σ1）
　－ｉ（σ2／２）・（Ｋ2+（１／２）σ2）
　－ｉ（σ3／２）・（Ｋ3+（１／２）σ3）

Ｓj＝σj／２より

［ＰjＳj，ＸkＳk］
＝－ｉＳj・（Ｋj＋Ｓj）

ｃｆ）
　Ｐ0＝Ｐjσj

ｉ・（ｄＫ1／ｄｘ0）＝［Ｋ1，Ｐ0］
＝［Ｘ2Ｐ3－Ｘ3Ｐ2，Ｐjσj］
=［Ｘ2，Ｐ2］Ｐ3σ2
－［Ｘ3，Ｐ3］Ｐ2σ3

$= i\,(P_3\sigma_2 - P_2\sigma_3)$

$i \cdot (dS_1/dx_0) = [S_1, P_0]$
$= (1/2)\,[\sigma_1, P_j\sigma_j]$
$= (1/2) \cdot (P_2[\sigma_1, \sigma_2] + P_3[\sigma_1, \sigma_3])$
$= i\,(P_2\sigma_3 - P_3\sigma_2)$

$\therefore\ \ i \cdot (d(K_1 + S_1)/dx_0) = 0$

Ｋ：「君が加わるのはσのせいだ。」
Ｓ：「つまり、僕を加えないと君も半人前ってこと。」
σ：「Ｓ君が出てくる理由は、Ｐ君とＸ君の仲が悪いからでしょ。」
Ｐ：「Ｘとの交換関係は、僕だけのせいじゃないさ。」
Ｘ：「君とはいまでも絶交中だよ。」

計量テンソル

［P_0，X_0］＝ｉ

［P_j，X_k］＝ｉ・δjk　：クロネコ、もといクロネッカーデルタ記号　 j，k＝１－３

P_0とP_jが<u>無関係</u>の場合

［P_0、X_j］＝［P_j，X_0］＝０

［P_μ，X_ν］＝ｉ・$\eta_{\mu\nu}$　：ミンコフスキー計量テンソル

一般座標変換すると、

［P'_μ，X'_ν］＝ｉ・$g_{\mu\nu}$　　：計量テンソル

ｃｆ）

$g^{\mu'\nu'}$・ｄ$X'_{\mu'}$・ｄ$X'_{\nu'}$　＝$\eta^{\mu\nu}$・ｄX_μ・ｄX_ν

シュワルツシルト球対称外部解

（ｄｓ）^2＝g_{00}・（ｄX_0）^2＋ｇ11・（ｄｒ）^2　　：線素長

g^{00}＝Ｎ

g^{11}＝－１／Ｎ

Ｎ＝（１－Ｒ／ｒ）　　：ｒ　動径

Ｒ＝２・Ｇ・Ｍ／ｃ^2　：シュワルツシルト半径　　Ｇ：万有引力定数　Ｍ：質量

［P_0，X_0］＝ｉ・g_{00}＝ｉ／Ｎ

［Ｐr，ｒ］＝ｉ・g_{11}＝－ｉ・Ｎ

Ｐr＝－ｉ・∂／∂ｒ　　（’を省略）

ｒ：「僕がＲに等しいと、Ｎ＝０になる。」

Ｐr：「ｒと交換日記でも始めようかな。」

Ｐ0：「わたしはどうなるのよ！」

Ｒ：「危ないから、事象の地平面には近づかないでね。」

Ｘ0：「彼から離れていれば安全さ。」
ｇ：「どういうこと？」
η：「君がしゃしゃりでない方がいいってことよ。」

ディラック方程式

記号

μ＝０、１－４

ｊ、ｋ＝１－４

ｉ：虚数単位

σ_{μ}：パウリ行列　μ＝０、１－３

ｍ：質量

ｃ：光速

ｈ（＝２π）：プランク定数

＠：直積

X^{μ}：四元位置ベクター　　X^{0}＝ｃ・ｔ

P^{μ}：四元運動量ベクター　P^{4}＝m・ｃ

Φn：n元スピナー

$\Phi 4^{¥}$＝（Φ_0 Φ_1 Φ_2 Φ_3）　　　¥：転置記号

$\partial_{\mu} \equiv \partial / \partial X^{\mu}$

｛Ａ，Ｂ｝＝ＡＢ＋ＢＡ：反交換関係

ρ_0

$=\sigma_0 @ \sigma_0$

＝（σ_0　0

　0　σ_0）

ρ_j　　ｊ＝１－３

$=\sigma_1 @ \sigma_j$

＝（０　σ_j

　σ_j　０）

ρ_4

$=\sigma_3 @ \sigma_0$

＝（σ_0　0

　0　$-\sigma_0$）

$\{\rho_j, \rho_k\} = 0$　（ｊ$\neq$ｋ）

$\{\rho_0, \rho_k\} = 2\rho_0$

$\rho_j\rho^j = (\rho_j)^2 = \rho_0$

$\pm\rho_0 P^0 \Phi 4 = \rho_j P^j \Phi 4$

$P^0 \Phi_k = i\,\partial_0 \Phi_k$　　　　　$k = 0、1-3$

$P^j \Phi_k = -i\rho_j\,\partial_j \Phi_k$　　　$j = 1-3$

$P^4 \Phi_k = (m \cdot c)\Phi_k$

$$\pm i\rho_0\partial_0\Phi 4 = -i\rho_j\,\partial_j\Phi 4 + \rho_4 P^4 \Phi 4$$

Ｘ：「ディラック氏は、

$(\rho_0 P^0)^2 - (\rho_k P^k)^2$

$= (\rho_0 P^0 - \rho_k P^k) \cdot (\rho_0 P^0 + \rho_k P^k)$

という因数分解を思いついたんだ。」

Ｐ：「空中分解よりも凄い！」

σ：「ところで、直積＠って何？」

ρ：「σ_j＠σ_kは、σ_jの中で１の場所にσ_kを入れ込んだものだよ。

パウリ行列は２行２列だから、４行４列に拡張されるのさ。」

＠：「σ_2＠σ_1は、σ_2の中で$-i$、iを、$-i\sigma_1$、$i\sigma_1$に置き換えればいい。」

∂：「ベクターとスピナーは？」

σ：「例えば３成分のベクターは、仲良しダンゴ３兄弟ってこと。

スピナーはふつう２成分だから、婚姻関係みたいなものさ。」

Φ：「おかげで、ぼくは４成分になった。」

ｈ：「粒子の夫婦Φa と、反粒子の夫婦Φb。」

$\Phi 4^{¥} = (\Phi a\ \ \Phi b)$

$\Phi a^{¥} = (\Phi_0\ \ \Phi_1)$

$\Phi b^{¥} = (\Phi_2\ \ \Phi_3)$

$$\pm\sigma_0 P^0 \Phi a=\sigma_0 P^4 \Phi a + \sigma_j P^j \Phi b$$

$$\pm\sigma_0 P^0 \Phi b=\sigma_j P^j \Phi a - \sigma_0 P^4 \Phi b$$

$$\sigma_0 (P^0 - m \cdot c) \Phi a=\sigma_j P^j \Phi b$$

$$\sigma_0 (P^0 + m \cdot c) \Phi b=\sigma_j P^j \Phi a$$

ハイゼンベルグ方程式

記号

μ＝０、１－４
ｊ、ｋ＝１－４
ｉ：虚数単位

ｍ：質量
ｃ：光速
ｈ：プランク定数（＝２π）
τ：固有時

X^{μ}：四元位置ベクター　　X^{0}＝ｃ・ｔ
P^{μ}：四元運動量ベクター　P^{4}＝m・ｃ
Φn：n元スピナー
$\Phi 4^{¥}$＝（Φ_0 Φ_1 Φ_2 Φ_3）　　　¥：転置記号
［Ａ，Ｂ］＝ＡＢ－ＢＡ：　交換関係
{Ａ，Ｂ}＝ＡＢ＋ＢＡ：反交換関係

$i\,dA^{\mu}/d\tau = i\,\partial A^{\mu}/\partial\tau + [A^{\mu}, (P^{0})^2/(2m)]$

$i\,dX^{\mu}/dX^{1} = [X^{\mu}, P^{1}]$
$i\,dX^{\mu}/d\tau = (dX^{1}/d\tau)\,[X^{\mu}, P^{1}]$
$dX^{1}/d\tau = P^{1}/m$より
$i\,dX^{\mu}/d\tau = [X^{\mu}, (P^{1})^2/(2m)]$

Ex）　ディラック方程式　$\pm\rho_0 P^{0}\Phi 4 = \rho_j P^{j}\Phi 4$

$i\,dX^{\nu}/d\tau$　　　　　：ν＝１－３
$= [X^{\nu}, (P^{0})^2/(2m)]$
$= ([X^{\nu}, P^{0}]P^{0} + P^{0}[X^{\nu}, P^{0}])/(2m)$

ここで $[X^{\nu}, P^{0}] = [X^{\nu}, \rho_j P^{j}] = \rho_j [X^{\nu}, P^{j}] = i\rho_{\nu}$

より

$=$ i $(\rho_\nu P^0 + P^0\rho_\nu)/(2m)$

$=$ i $\{\rho_\nu, P^0\}/(2m)$

$=$ i $\{\rho_\nu, \rho_j\} P^j/(2m)$

$\{\rho_\nu, \rho_j\} = 2\delta_{\mu j}$より

$= P^\nu/m$

Cf)

$P^\nu = m\,dX^\nu/d\tau$

$= (m/i)\,[X^\nu, (P^0)^2/(2m)]$

$= (1/2i)\,\{[X^\nu, P^0], P^0\}$

$= (1/2)\,\{dX^\nu/dX^0, P^0\}$

X^0：「ハイゼンベルグ方程式は、四元ベクターの式じゃないの？」

P^0：「僕の自乗はスカラーじゃないから、ローレンツ不変でない。」

Φ4：「スカラー？」

τ：「この世界の一匹オオカミのことさ。」

m：「P^μだけじゃダメだ。僕が入らないと。」

$\delta_{\mu j}$：「僕のことは紹介がないんだけど？」

ρ_ν：「いいんだよ、君は有名なんだから。」

カルツァークライン理論

記号

μ＝0，1－4
J＝0，1－3
X_μ：　5元位置ベクトル
P_μ：　5元運動量ベクトル
k_μ：　5元波数ベクトル
$\eta^{\mu\nu}$：　計量ベクトル

h：プランク定数
m：質量
λ_c＝h／（mc）：コンプトン波長

(X_0)^2＋(X_1)^2＋(X_2)^2＋(X_3)^2＝(X_4)^2　≦　(λ_c)^2
↓
(X_0)^2－(X_1)^2－(X_2)^2－(X_3)^2＝(X_4)^2

場ψ（X_j，X_4)の周期的境界条件
ψ（X_j，X_4)＝ψ（X_j，X_4＋λc）
ψ'（X_j）exp（i・$k^4 X_4$)＝ψ'（X_j，i・k^4（X_4＋λ_c））
k^4・λ_c＝2πn（自然数）
P^4＝（h／2π）・k^4
＝nh／λ_c
＝n・mc

(P_0)^2－(P_1)^2－(P_2)^2－(P_3)^2－(P_4)^2＝0
$i\partial_\mu\psi = P_\mu\psi$
n・mcψ＝$P_4\psi$

$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi$（$X_j$，$X_4$)＝0
（$-\partial^0\partial_0+\partial^a\partial_a$－（n・mc）^2）$\psi$（$X_j$，$X_4$)＝0　：a＝1－3

$(\Box + (n \cdot mc)^2)\,\psi(X_j, X_4) = 0$　　：K－G方程式

$\psi(X_j, X_4) = \Sigma_n\, \psi'(X_j)\exp(i \cdot k^4 X_4)$

P_4：「この世界が５次元になるということは考えにくい。

僕が飛び飛びのｍｃになるなんて。」

ｍ：「僕は、ちゃんと表に出られるから気にしなてないけど。」

X_4：「わたしがコンパクト化されてるなんて、誰が言い出したの？」

λ_c：「君が縮んだんじゃなくて、他のＸが膨張しただけだよ。

粒子のエネルギーがコンプトン波長くらいの距離内に押し込まれると、

どの方向でも $k = (2\pi / \lambda_c)\, n$ になって量子化されるんだ。」

ψ：「つまり、ｍｃの２乗に、たかだか４個のｎの２乗値の和を掛け算したものになるってことか。」

$$(P_0)^2 = (mc \cdot n_1)^2 + (mc \cdot n_2)^2 + (mc \cdot n_3)^2 + (mc \cdot n_4)^2$$
$$= (mc)^2 \cdot ((n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2)$$

ｈ：「4平方の和の定理というのがあって、自然数Ｎは多くても４つの２乗数に分解できるそうだ。」

P_0：「ってことは、僕はｍｃ・$\sqrt{N}$なんだ。」

Ｎ：「１が最低値のとき。」

ｃ：「あのー、僕はｍ＝０なんですが・・・」

ｍ：「貴方はX_4につかまらないから、お誘いがないのよ。」

ポテンシャル井戸

単位系
ｈ＝２π
ｃ＝１

Ｐ：運動量
Ｅ：全エネルギー
Ｖ：ポテンシャルエナジー
ｍ：質量
π：円周率

一次元シュレーディンガー方程式
（ｍ＋Ｐ^{2}／（２ｍ）＋Ｖ）ψ＝Ｅψ
Ｐψ＝－ｉ∂$_{1}$ψ＝－ｉｄψ／ｄｘ

Ｖ＝∞　（ｘ＜０，ｘ＞Ｌ）
Ｖ＝０　（０≦ｘ≦Ｌ）

ψ∝exp（ｉ・ｋ・ｘ）とおくと、
（ｍ＋ｋ^{2}／（２ｍ）＋０）ψ＝Ｅψ
∴ｋ＝±√（２ｍ・（Ｅ－ｍ））
ψ（ｘ）＝Ａ・exp（ｉ・ｋ・ｘ）＋Ｂ・exp（－ｉ・ｋ・ｘ）

境界条件　ψ（０）＝ψ（Ｌ）＝０

Ａ＋Ｂ＝０　から　Ｂ＝－Ａ
Ａ・exp（ｉ・ｋ・Ｌ）＋Ｂ・exp（－ｉ・ｋ・Ｌ）
＝Ａ・（exp（ｉ・ｋ・Ｌ）－exp（－ｉ・ｋ・Ｌ））
＝Ａ・２ｉ・ｓｉｎ（ｋＬ）
＝０

∴ｋ＝ｎπ／Ｌ　（ｎは整数）

波数ｋ＝２π／λ:波長　より　（λ／２）・ｎ＝Ｌ　（定在波）

Ｅ＝ｍ＋ｋ^{2}／（２ｍ）
＝ｍ＋（ｎ・π）^{2}／（２ｍ・Ｌ^{2}）

群速度：ｄＥ／ｄＰ
＝Ｐ／ｍ
＝ｎπ／（ｍＬ）

位相速度：Ｅ／Ｐ
＝（ｍ＋（ｎπ）^{2}／（２ｍ・Ｌ^{2}））／（ｎπ／Ｌ）
＝ ｍ・Ｌ／（ｎπ）＋（ｎπ）／（２ｍ・Ｌ）
≧２√（１／２）＝√２［・ｃ］

ψ：「無限に深いポテンシャル井戸に嵌ったカエルは、連続的にジャンプできない。」
Ｅ：「井の中の蛙、大海を知らず、ってコトバがあるよ。」
Ｖ：「その蛙は、だた空の高さを知る。」
Ｐ：「大海の方が、井戸よりも深いんじゃないの。」
ｍ：「暗すぎて何も見えなってことさ。」

cf)　クライン－ゴルドン方程式

P^0^2ψ＝（P^2＋m^2）ψ

ψ∝exp（i・(ω・x^0＋k・x^1)　）　　　　　　：x^0＝t

ω^2＝k^2＋m^2

k＝±√（ω^2－m^2)

E＝ω＝±√（m^2＋（nπ／L）^2)

dE／dP＝dω／dk＝k／ω

E／P＝ω／k

Schrödinger方程式

記号

ϕ：波動関数、スカラーの状態関数

$U=\exp(i\rho G)$　：ユニタリー群　パラメータρ　ジェネレータG

$UU^{-1}=U^{-1}U=I$　：恒等変換

i　：虚数単位

∂_μ：$\partial/\partial x^\mu$

S系

$$\partial_\mu\phi=0$$

S'系

$$U\partial_\mu U^{-1}U\phi=0$$

$$\phi'=U\phi$$

$$\partial'_\mu=U\partial_\mu U^{-1}$$

$$=UU^{-1}\partial_\mu+U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$=\partial_\mu+iUU^{-1}(\partial_\mu\rho)G$$

$$=\partial_\mu+i(\partial_\mu\rho)G$$

$$\partial'_\mu\phi'=0$$

Ex)

$\rho=x^\nu$　：４元位置ベクタ

$G=P_\nu$　：４元運動量ベクタ

のとき

$$\partial_\mu\rho=\partial_\mu x^\nu=g_\mu{}^\nu$$

$$\partial'_\mu=\partial_\mu+ig_\mu{}^\nu P_\nu=\partial_\mu+iP_\mu$$

$$\therefore(\partial_\mu+iP_\mu)\phi'=0$$

$$\partial_\mu\phi'=-iP_\mu\phi'$$

$$i\partial_\mu\phi'=P_\mu\phi'$$

ϕ：「ダッシュ記号を外して、

$i\partial_\mu\phi = P_\mu\phi$

としよう。」

∂_μ：「この複素共役は

$-i\partial_\mu\phi^* = P_\mu\phi^*$　」

P_μ：「僕は、$P_\mu = P_\mu{}^*$　」

G：「Schrödinger方程式は１組でないといけないね。」

U：「静止座標系で、

$i\partial_0\phi = m\phi$の場合

運動座標系ではどうなるかな？

ρ：「$i\partial_0\phi = (P_0 + m)\phi$

$P_0 = (1/2)(P^j)$^2/mとおくと、よく知られた式が出る。」

G：「$\rho = \theta^{\mu\nu}$　：６元角度・ラピディティテンサ

$G = L_{\mu\nu}$　：６元角運動量テンサ（ローレンツジェネレータ）

のとき

回転なしの系では$\partial\phi/\partial\theta^{\mu\nu} = 0$とする。」

ρ：「$\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$

$L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$

で反対称テンサだよ。」

G：「回転系では、

$(\partial/\partial\theta^{\mu\nu} + iL_{\mu\nu})\phi' = 0$

$i\partial\phi'/\partial\theta^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}\phi'$　」