ガリレイ変換と私

無名のヒト

前提

・ 慣性系Ｓ　位置：ｘ　時間：ｔ
慣性系Ｓ’　位置：ｘ’　時間：ｔ’
Ｖ：　ＳとＳ’との相対速度

・定義：
ｃ：真空中での光速

ｘ’＝ｘ＋ａ
ｔ’＝ｔ＋ｂ
（ａ≠０，ｂ≠０）

ｘ0　＝ｃ・ｔ
ｘ’0＝ｃ・ｔ’

β＝Ｖ／ｃ

・記号　（Ｚ）^2=Ｚ・Ｚ

・光速一定の原理
（ｘ’）^2－（ｃ・ｔ’）^2=（ｘ）^2－（ｃ・ｔ）^2＝0　（1）式

計算

（１）式に

$x' = x + a$

$t' = t + b$　を代入

$x^2 + 2ax + a^2 - c^2(t^2 + 2bt + b^2) = x^2 - (c \cdot t)^2$

$a(2x + a) = c^2 \cdot b(2t + b)$

$(2x + a) / (2t + b) = c^2 \cdot (b / a) = k$

$(x + a) / (t + b) = x / t = k$

$\therefore (x / t) \cdot (a / b) = c^2$

$x' = x + a$

$t' = t + (a \cdot x) / (c^2 \cdot t)$

$x = 0$の場合、

$-V = (x' / t') = a / t$　から　$a = -V \cdot t$

よって

$x' = x - \beta \cdot x0$

$x'0 = x0 - \beta \cdot x$

逆変換

$x = x' + \beta \cdot x0$

$= x' + \beta \cdot (x'0 + \beta \cdot x)$

$(1 - \beta^2)\ x = x' + \beta \cdot x'0$

$1 >> \beta^2$ならば、

$x = x' + \beta \cdot x'0$

$x0 = x'0 + \beta \cdot x$

$= x'0 + \beta \cdot (x' + \beta \cdot x0)$

$(1 - \beta^2)\ x0 = x'0 + \beta \cdot x'$

$1 >> \beta^2$ならば、

$x0 = x'0 + \beta \cdot x'$

シュレーディンガー方程式

・記号

$\phi(x0, x1)$：波動関数

exp(X)　　：指数関数

$\partial 0 = \partial / \partial x0$　（$x0 = c \cdot t$）

$\partial 1 = \partial / \partial x1$

$h = 2 \cdot \pi$（自然単位系）

m：粒子質量

$P = -i\partial 1$

$P\phi = p\phi$：運動量

・S系

$i\partial 0\phi = [P^2/(2mc)]\phi$

・変換式

$P = P' + mV$　（∵$m \cdot dx'1/dt = m \cdot dx1/dt - mV$）

$\partial 0 = (\partial x'0/\partial x0)\partial'0 + (\partial x'1/\partial x0)\partial'1 = \partial'0 - \beta\partial'1$

$\partial 1 = (\partial x'1/\partial x1)\partial'1 + (\partial x'0/\partial x1)\partial'0 = \partial'1 - \beta\partial'0$

・S'系

$i\partial 0\phi = i(\partial'0 - \beta\partial'1)\phi = (i\partial'0 + \beta P')\phi$

$[P^2/(2mc)]\phi = [P'^2/(2mc) + \beta P' + mc\beta^2/2]\phi$

$\therefore\ i\partial'0\phi = [P'^2/(2mc) + mc\beta^2/2]\phi$

$\phi(x'0, x'1) = [\exp(-i(mV^2/2)t')]\Psi(x'0, x'1)$とおけば、

$i\partial'0\Psi = [P'^2/(2mc)]\Psi$

$\phi(x'0, x'1) \propto \exp(i((E' - (mV^2/2))t' \pm p'x'1))$

$p' = \sqrt{(2mE')}$

交換関係

・記号

［A,B］＝ＡＢ－ＢＡ　：交換子

Ｐ0, Ｐ1 ：４元運動量成分　（Ｐ2＝Ｐ3＝０）

Ｘ0, Ｘ1　：４元位置成分

ｍ　：質量

・単位系

ｈ＝２・π（自然単位系）

ｉ：虚数単位

・Ｓ系

［Ｘ1, Ｐ1］＝ｉ

［Ｘ0, Ｐ0］＝－ｉ

・変換式

Ｘ'0＝Ｘ0－β・Ｘ1

Ｘ'1＝Ｘ1－β・Ｘ0

Ｐ'0＝Ｐ0－β・Ｐ1

Ｐ'1＝Ｐ1－β・Ｐ0

・Ｓ'系

［Ｘ'1, Ｐ'1］

＝［Ｘ1－β・Ｘ0, Ｐ1－β・Ｐ0］

＝［Ｘ1, Ｐ1］

－β（［Ｘ0, Ｐ1］＋［Ｘ1, Ｐ0］）

＋β^2［Ｘ0, Ｐ0］

＝　ｉ（１－β^2）　（ｍ＝０）

or ｉ（１－β^2　－β（ｍｃ）^2／Ｐ0／Ｐ1）（ｍ≠０，Ｐ0＞０）

［Ｘ'0, Ｐ'0］

＝［Ｘ0－β・Ｘ1, Ｐ0－β・Ｐ1］

$= [X_0, P_0]$
$-\beta([X_0, P_1] + [X_1, P_0])$
$+\beta^2 [X_1, P_1]$

$= -i(1-\beta^2) \quad (m=0)$
or $-i(1-\beta^2 + \beta(mc)^2/P_0/P_1) \quad (m\neq 0,\ P_0>0)$

cf)
$P_0=\sqrt{P_1^2+(mc)^2}$

m＝０の場合
$[X_1, P_0] = i$
$[X_0, P_1] = -i$

m≠０の場合
$[X_1, P_0] = i(P_1/P_0)$
$[X_0, P_1] = -i(P_0/P_1)$

$P_0=\alpha_1 P_1+b(mc)$ $\{\alpha_j,\alpha_k\}=2I\delta_{jk}$ $\{\alpha_j,b\}=0$ $\alpha_j^2=b^2=I$
$P_1=\alpha_1 P_0-\alpha_1 b(mc)$

$[X_1, P_0] = i\alpha_1$
$[X_0, P_1] = -i\alpha_1$

波動方程式

・記号
　∂0＝∂／∂ｘ0　（ｘ0＝ｃ・ｔ）
∂1＝∂／∂ｘ1

　ｖｐ：位相速度
　∂a＝∂0＋（ｖｐ／ｃ）∂1
　∂b＝∂0－（ｖｐ／ｃ）∂1

　Ｖ：相対速度　𝛽＝Ｖ／ｃ
　ｖa／ｃ＝（𝛽＋ｖｐ／ｃ）／（１＋（ｖｐ／ｃ）・𝛽)
　ｖb／ｃ＝（𝛽－ｖｐ／ｃ）／（１－（ｖｐ／ｃ）・𝛽)

・Ｓ系
　[（∂0）^2𝜙－（ｖｐ／ｃ）^2（∂1）^2]Φ＝∂a∂bΦ＝０

・変換式
　ｘ'0＝ｘ0－𝛽・ｘ1
ｘ'1＝ｘ1－𝛽・ｘ0

∂0＝∂'0－𝛽・∂'1
　∂1＝∂'1－𝛽・∂'0

∂a＝(１－（ｖｐ／ｃ）・𝛽)∂'0－（𝛽－ｖｐ／ｃ）∂'1
　∂b＝(１＋（ｖｐ／ｃ）・𝛽)∂'0－（𝛽＋ｖｐ／ｃ）∂'1

・Ｓ'系
　∂a∂ｂΦ＝[１－（ｖｐ／ｃ）^2・𝛽^2]（∂'0－（ｖa／ｃ）・∂'1）（∂'0－（ｖb／ｃ）・∂'1）Φ
＝０
より（　ただし、（ｖｐ／ｃ）^2・𝛽^2≠１）

　[（∂'0）^2－（ｖa／ｃ＋ｖb／ｃ）・∂'1・∂'0＋（ｖa／ｃ）・（ｖb／ｃ）・(∂'1）^2］Φ＝０

　𝛽^2＜＜１の場合

　（ｖa／ｃ＋ｖb／ｃ）＝2𝛽・[１－（ｖｐ／ｃ）^2]／[１－（ｖｐ／ｃ）^2・𝛽^2]≒2𝛽・[１－（

ｖp／ｃ）^2]
（ｖa／ｃ）・（ｖb／ｃ）=[β^2－（ｖp／ｃ）^2]／[１－（ｖp／ｃ）^2・β^2]≒－（ｖp／ｃ）^2

Φ=Φa（ｘ'1+(ｖa／ｃ)・ｘ'0）+Φb（ｘ'1+(ｖb／ｃ)・ｘ'0）

ハッブル則

S系	S'系	
x	x'	：星Ａから星Ｂまでの距離
v	v'	：星Ａからみた星Ｂの後退速度
H	H'	：ハッブル係数（$H\cdot t=H'\cdot t'=1$）

S系

$$v=H\cdot x$$

S'系

$$v'=(v-\beta\cdot c)/(1-(\beta/c)\cdot v)$$

$$H'=H\cdot(t/t')=H/(1-(\beta/c)\cdot v)$$

$$x'=x-(\beta\cdot c)\,t$$

$$\therefore\ H'\cdot x'=H\cdot(x-(\beta\cdot c)\,t)/(1-(\beta/c)\cdot v)=v'$$

ｃｆ）

m：星Ｂの質量

運動量：$P=m\cdot v=m\cdot H\cdot x$

$$dP/dt=m\cdot((dH/dt)\cdot x+H\cdot(dx/dt))$$

$$=m\cdot x\cdot(dH/dt+H^2)$$

$$=m\cdot v\cdot(dH/dt+H^2)/H$$

$$\therefore (dP/dt)/P=(dH/dt+H^2)/H$$

(i)　$dP/dt=0$の場合

$$dH/dt=-H^2$$

$H(0)=H_0$として、$H(t)=H_0/(1+H_0\cdot t)$

$1\ll H_0\cdot t$の場合、$H(t)=1/t$

(ii)　$dP/dt=a\ (>0)$の場合

$$dH/dt=H\cdot(a-H)$$

$H>0$　and　$a>H$の場合　加速膨張

Ex）aが一定なら（H：ロジスティック関数）、

$$H(t)=a/(1+(a/H_0-1)\cdot\exp(-a\cdot t))$$

Ｈ＞０　and　ａ＜Ｈの場合　減速膨張

相対速度

相対速度Ｖｊ（ｊ＝1-3）

ｘ’ｊ＝ｘｊ－（Ｖｊ／ｃ）・ｘ0
ｘ’0＝ｘ0　－Ｖｊ・ｘｊ／ｃ

Ｖ1／ｘ1＝Ｖ2／ｘ2＝Ｖ3／ｘ3
Ｖｊ・ｘｊ＝｜Ｖｊ｜・｜ｘｊ｜
｜Ｖｊ｜＝√（Ｖ1＾2＋Ｖ2＾2＋Ｖ3＾2）
｜ｘｊ｜＝√（ｘ1＾2＋ｘ2＾2＋ｘ3＾2）

ｘ’ｊ・ｘ’ｊ
＝ｘｊ・ｘｊ－2・（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）・ｘ0＋（Ｖｊ／ｃ）^2・(ｘ0)^2

ｘ’0・ｘ’0
＝ｘ0・ｘ0　－2・（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）・ｘ0　－（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）^2

（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）^2＝（|Ｖｊ｜^2・｜ｘｊ｜^2）／ｃ^2

ｘ’0・ｘ’0－ｘ’ｊ・ｘ’ｊ
≒ｘ0・ｘ0－ｘｊ・ｘｊ

（Ｖｊ／ｃ）・ｘ’ｊ＝（Ｖｊ／ｃ）・ｘｊ－（Ｖｊ／ｃ）^2・ｘ0
ｘ’0＋Ｖｊ・ｘ’ｊ／ｃ≒ｘ0－Ｖｊ・ｘｊ／ｃ＋Ｖｊ・ｘｊ／ｃ＝ｘ0

（Ｖｊ／ｃ）^2・ｘ0＝｜Ｖｊ｜^2・ｘ0／ｃ^2

（Ｖｊ／ｃ）・ｘ’0＝（Ｖｊ／ｃ）・ｘ0　－（Ｖｊ／ｃ）・（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）
ｘ’ｊ＋（Ｖｊ／ｃ）・ｘ’0≒ｘｊ－（Ｖｊ／ｃ）・ｘ0＋（Ｖｊ／ｃ）・ｘ0＝ｘｊ

（Ｖｊ／ｃ）・（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）＝｜Ｖｊ｜^2・ｘｊ／ｃ^2　（∵Ｖｊ＝｜Ｖｊ｜ｘｊ／｜ｘｊ｜）

ガリレイ変換とは

　ニュートンの運動方程式を変えない一次座標変換

記法
dot（Ｘj）＝ｄＸj／ｄＸ0　　　:１階微分
dot((Ｘj))=dot（dot（Ｘj））　　：２階微分
j=１－３

力　Ｆ＝ｍ・ｃ^2・dot((Ｘ’j))
　　　＝ｍ・ｃ^2・dot((Ｘj))

・変換係数Ａ～Ｄ
　Ｘ’j＝Ａ・Ｘj＋Ｂ・Ｘ0
　Ｘ’0＝Ｃ・Ｘj＋Ｄ・Ｘ0

dot（Ｘ’j）＝（Ａ・dot（Ｘj）＋Ｂ）／（Ｄ＋Ｃ・dot（Ｘj））
dot((Ｘ’j))=（Ａ・Ｄ－Ｂ・Ｃ）・dot((Ｘj))／（Ｄ＋Ｃ・dot（Ｘj））^3

∴　Ｃ＝０
　　Ａ＝Ｄ^2

Ｘj=0のとき、　Ｘ’j／Ｘ’0＝Ｂ／Ｄ＝－β＝－Ｖ／ｃ　　　Ｖ：相対速度

変換行列Ｇ（β）
＝（Ｄ^2　－β・Ｄ
　　０　　　　　Ｄ）

Ｇ（－β）Ｇ（β）
＝（Ｄ　＋β・Ｄ
　　０　　　　Ｄ）
・（Ｄ　－β・Ｄ
　　０　　　　Ｄ）

＝Ｄ^2（Ｄ　　（１－Ｄ）・β
　　　　０　　　１　）
＝Ｉ（恒等変換行列）＝（１　　０
　　　　　　　　　　　０　　１）

∴Ｄ＝１

（Ｘ’j
Ｘ’0）
＝（１－β
　　０　１）

・（Xj
　X0）

ｃｆ）
　相対性原理から
　Ａ＝Ｄ
　Ｂ／Ａ＝－β
　Ａ・（Ａ＋β・Ｃ）＝１

　β＝０のとき　　　　Ｂ＝０
　　　　　　　　　　　Ａ^2＝１
　β＝１のとき　　　　Ｂ＝－Ａ
　　　　　　　　　　　Ｃ＝（１－Ａ^2）／Ａ

位相速度ｖｐ

・記号
Ｐμ：４元運動量成分　（μ＝０，１～３）
β＝Ｖ／ｃ
ｍ：質量

Ｐ’1＝Ｐ1－β・Ｐ0
Ｐ’0＝Ｐ0－β・Ｐ1

（Ｐ’0）^2－（Ｐ’1）^2
＝（１－β^2）・（Ｐ0^2－Ｐ1^2）≒Ｐ0^2－Ｐ1^2＝（ｍｃ）^2

｜Ｐ0｜＝√（（ｍｃ）^2＋Ｐ1^2）
＝ｍｃ√（１＋（Ｐ1／ｍｃ）^2）
≒ｍｃ（１＋（Ｐ1／ｍｃ）^2／２）　　（Ｐ1<<ｍｃ）
＝ｍｃ＋Ｐ1^2／（２ｍｃ）
∴｜ｖｐ｜＝｜Ｐ0／Ｐ1｜ｃ
＝ｍｃ^2／｜Ｐ1｜＋｜Ｐ1｜／（２ｍ）
＞２√（（ｍｃ^2／｜Ｐ1｜）・（｜Ｐ1｜／（２ｍ）））＝（√２）・ｃ

ｖｐ＞（√２）・ｃ　または　ｖｐ＜－（√２）・ｃ

ｃｆ）
｜ｖｐ｜＝ｃ√（１＋（ｍｃ／Ｐ1）^2）
≒ｍｃ^2／｜Ｐ1｜　　　（Ｐ1<<ｍｃ）
群速度：ｖｇ＝Ｐ1／ｍ
｜ｖｐ｜・｜ｖｇ｜＝ｃ^2

ミンコフスキー時空

４次元平坦時空
（１，３）擬似ユークリッド時空

記号

$\eta_{\mu\nu}$：計量テンソル　（μ，ν＝0,1-3）

$(J_0)^2 = (J_k)^2 = J_0$　（k＝1-3）

$[J_0, J_k] = 0$　:交換子［A，B］＝ＡＢ－ＢＡ

$\{J_n, J_m\} = 2J_0\delta_{nm}$　(n,m＝1-3)　:反交換子｛A，B｝＝ＡＢ＋ＢＡ

$n = n^k J_k$　:単位ベクトル　（k＝1-3）

θ：ラピディティ　$\beta = n^k \tanh\theta$

$dx = J_\nu dx^\nu = J_0 dx^0 + J_k dx^k$

$d^- x = J_0 dx^0 - J_k dx^k$　:Einstein縮約規則

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= d^- x\, dx \\
&= (J_0 dx^0)^2 - J_k J_m dx^k dx^m \\
&= J_0 (dx^0)^2 - (1/2)\{J_k, J_m\}\, dx^k dx^m \\
&= J_0 (dx^0)^2 - J_0\delta_{km}\, dx^k dx^m \\
&= J_0 (dx^0)^2 - J_0 (dx^k)^2 \\
&= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu
\end{aligned}
$$

$\eta_{00} = J_0$

$\eta_{km} = -J_0\delta_{km}$　（k，m＝1-3）

$\therefore \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\ J_0\ (+1,-1,-1,-1)$　:対角行列

Ｓ系

$T = x^0 J_0$

$X = x^k J_k$　（k＝1-3）

S'系

$T' = x'^0 J_0$

$X' = x'^k J_k$

$ds^2 = (T')^2 - (X')^2 = (T)^2 - (X)^2$

$= (T' + X')(T' - X') = (T + X)(T - X)$

$T' + X' = \exp(n\theta)(T + X)$

$T' - X' = (T - X)\exp(-n\theta)$　　とおく

$(T' + X')(T' - X')$

$= \exp(n\theta)(T + X)(T - X)\exp(-n\theta)$

$= \exp(n\theta)((T)^2 - (X)^2)\exp(-n\theta)$

$= (T)^2 - (X)^2$

$\exp(\pm n\theta) = J_0\cosh\theta \pm n\sinh\theta$　より

$\exp(n\theta)(T + X)$

$= (J_0\cosh\theta + n\sinh\theta)(T + X)$

$= J_0 T\cosh\theta + nT\sinh\theta + J_0 X\cosh\theta + nX\sinh\theta$

$(T - X)\exp(-n\theta)$

$= (T - X)(J_0\cosh\theta - n\sinh\theta)$

$= TJ_0\cosh\theta - Tn\sinh\theta - J_0 X\cosh\theta + Xn\sinh\theta$

$T' + X' = J_0 T\cosh\theta + nT\sinh\theta + J_0 X\cosh\theta + nX\sinh\theta$

$T' - X' = J_0 T\cosh\theta - nT\sinh\theta - J_0 X\cosh\theta + Xn\sinh\theta$

・和から

$2T' = 2J_0 T\cosh\theta + (nX + Xn)\sinh\theta$

ここで

$nX = n^k x^m J_k J_m$

$= (1/2)\{J_k, J_m\} n^k x^m$

$= J_0 \delta_{km}\ n^k x^m$

$= n^k x^k J_0$

$X n = x^m n^k J_m J_k$

$= (1/2)\{J_m, J_k\}\ n^k x^m$

$= J_0 \delta_{mk}\ n^k x^m$

$= n^k x^k J_0$

$T' = x'^0 J_0 = x^0 J_0 \cosh\theta + n^k x^k J_0 \sinh\theta$

$\therefore\ x'^0 = \cosh\theta\,(x^0 + n^k \tanh\theta\, x^k)$

$= \cosh\theta\,(x^0 + \beta^k x^k)$

$\fallingdotseq x^0 + \beta^k x^k$ $(= |\beta|\,|x|)$　：$\theta \fallingdotseq 0$ で　$\cosh\theta \fallingdotseq 1$

・差から

$2X' = 2nT\sinh\theta + 2J_0 X\cosh\theta$

$X' = x'^k J_k = n^k x^0 J_k J_0 \sinh\theta + x^k J_0 J_k \cosh\theta$

$\therefore\ x'^k = x^k \cosh\theta + n^k x^0 \sinh\theta$

$= \cosh\theta\,(x^k + n^k x^0 \tanh\theta)$

$= \cosh\theta\,(x^k + \beta^k x^0)$

$\fallingdotseq x^k + \beta^k x^0$　：$\theta \fallingdotseq 0$ で $\cosh\theta \fallingdotseq 1$

ワイル変換

V：相対速度
c：光速
β＝V／c

X_0　X_1　x_0　x_1　：座標
X'_0　X'_1　：座標
λ　：変換パラメータ

$X'_0 = \lambda X_0$
$X'_1 = \lambda X_1$

$X_0 = x_0 - \beta x_1$
$X_1 = x_1 - \beta x_0$

$X'_0 = \lambda(x_0 - \beta x_1)$
$X'_1 = \lambda(x_1 - \beta x_0)$

$X'_0{}^2 - X'_1{}^2$
$= \lambda^2 \cdot (1 - \beta^2) \cdot (x_0{}^2 - x_1{}^2)$

よって、$\lambda^2 \cdot (1 - \beta^2) = 1$ のとき
$X'_0{}^2 - X'_1{}^2 = x_0{}^2 - x_1{}^2$
が成り立つ。

$\lambda = \pm\sqrt{(1 - \beta^2)}$

プラスのときにローレンツ変換（ワイル変換・ガリレイ変換（モドキ））。

ガリレイ変換と私

http://p.booklog.jp/book/74517

著者 : 無名のヒト
著者プロフィール：http://p.booklog.jp/users/p-pricure/profile

感想はこちらのコメントへ
http://p.booklog.jp/book/74517

電子書籍プラットフォーム : パブー（http://p.booklog.jp/）
運営会社：株式会社トゥ・ディファクト