やり直し 高校数学ＩＡ

三角比と平面図形

本書の構成

・初級編 … ページ 2 ～ 11

・中級編 … ページ 12 ～ 23

・上級編 … ページ 24 ～ 32

初級編・中級編・上級編の３段階に分けて

理解度チェック問題

▽

各問題の解答・解説

▽

各問題の類例

という構成になっています。

「大学や医療系専門学校の受験に数学が必要だけど勉強がはかどらない」という人を対象に、初歩から効率良くポイントを理解できるようにつくられています。

理解度チェック問題

※次ページ以降に，各問題の**解答・解説・類例**があります。

次の $\boxed{}$ にあてはまる数や式を答えなさい。

$\boxed{1}$　$\angle C=90°$ の直角三角形 ABC で，3 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。

$b:c=1:3$ のとき

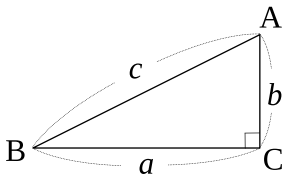
$\sin B=\boxed{\text{ア}}$

$\cos B=\boxed{\text{イ}}$

$\tan B=\boxed{\text{ウ}}$

である。また

$c=10$， $\sin A=\dfrac{4}{5}$ のとき　$a=\boxed{\text{エ}}$ となる。



ア______

イ______

ウ______

エ______

$\boxed{2}$　右の図のように，1 つの角が 30° である直角三角形の 3 辺の長さを a, b, c とする。

$\dfrac{a}{c}=\boxed{\text{オ}}$，　$\dfrac{b}{c}=\boxed{\text{カ}}$ であるから

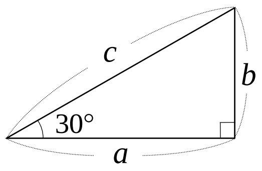
$\sin 30°=\boxed{\text{キ}}$

$\sin 60°=\boxed{\text{ク}}$

といえ，

$\tan\boxed{\text{ケ}}°\ =\sqrt{3}$

である。



オ______

カ______

キ______

ク______

ケ______

$\boxed{3}$　$\angle A$ が鋭角の $\triangle ABC$ で，3 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，その面積を S とする。次に，頂点 C から辺 AB に垂線 CH をひいて， $AH=x$， $CH=y$ とする。

このとき， x と y はそれぞれ b, A を用いて

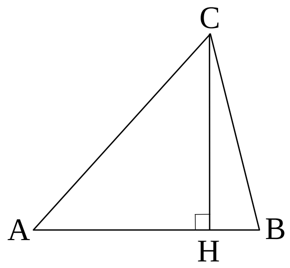
$x=\boxed{\text{コ}}$，　$y=\boxed{\text{サ}}$

と表されるから， S と a^2 をそれぞれ b, c, A を用いて表すと

$S=\boxed{\text{シ}}$

$a^2=\boxed{\text{ス}}$

となる。



コ______

サ______

シ______

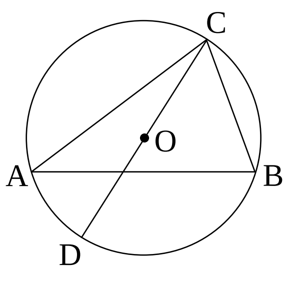
ス______

$\boxed{4}$　$\angle A$ が鋭角である $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とし，CO の延長と円周との交点を D とすると　$\angle DBC=\boxed{\text{セ}}°$　である。

さらに，その外接円の半径を R，辺 BC の長さを a とするとき， R は a, A を用いて

$R=\boxed{\text{ソ}}$

と表される。



セ______

ソ______

チェック問題 $\boxed{1}$ 解答・解説(1)

解答

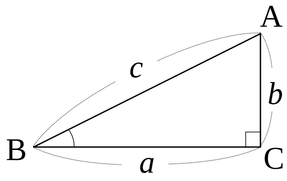
ア $\dfrac{1}{3}$　　イ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　ウ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　エ 8

解説

直角三角形ABCにおいて

　斜辺の長さが c

残りの２つの辺のうち



　∠Bに隣り合う方の辺(∠Bの隣辺)の長さが a

　∠Bに向かい合う方の辺(∠Bの対辺)の長さが b

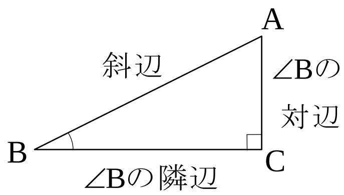
であるとき

$\dfrac{b}{c}$ を $\sin B$（サイン B），　$\dfrac{a}{c}$ を $\cos B$（コサイン B）

$\dfrac{b}{a}$ を $\tan B$（タンジェント B）

※ B は∠Bの大きさを表す。

と表します。



$$\sin B=\frac{対辺}{斜辺}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}$$

$$\cos B=\frac{隣辺}{斜辺}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

$$\tan B=\frac{対辺}{隣辺}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}$$

$b:c=1:3$ より，$\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{3}=k$ （$k>0$）とおくと

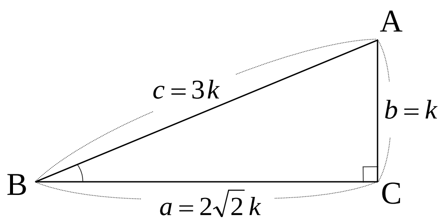
　$\dfrac{b}{1}=k$ より　$b=k$

　$\dfrac{c}{3}=k$ より　$c=3k$

と表せます。さらに，三平方の定理から

　$a^2+b^2=c^2$　すなわち　$a^2=c^2-b^2=(3k)^2-k^2=8k^2$

$a>0$ より　$a=\sqrt{8k^2}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{k^2}=2\sqrt{2}\,k$



よって

　$\dfrac{b}{c}=\dfrac{k}{3k}=\dfrac{1}{3}$　すなわち　$\sin B=\dfrac{1}{3}$　←ア

　$\dfrac{a}{c}=\dfrac{2\sqrt{2}\,k}{3k}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　すなわち　$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　←イ

　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{k}{2\sqrt{2}\,k}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　すなわち　$\tan B=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　←ウ

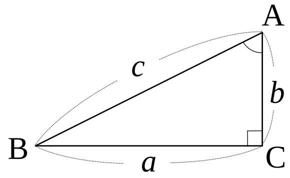
チェック問題$\boxed{1}$ 解答・解説(2)

解説

次に，∠A の対辺の長さは a であるので

$$\sin A=\frac{a}{c}$$

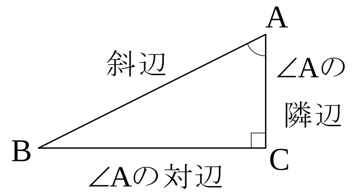
すなわち　$a=c\sin A$



ゆえに

$c=10$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$ のとき

$$a=10\cdot\frac{4}{5}=8 \quad \leftarrow エ$$



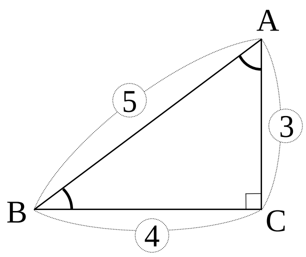
$$\sin A=\frac{対辺}{斜辺}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

$$\cos A=\frac{隣辺}{斜辺}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}$$

$$\tan A=\frac{対辺}{隣辺}=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}$$

〔補足〕

3 辺の比が $3:4:5$ の直角三角形 ABC において，∠A と ∠B の大きさは，2 つの辺の比を用いて次のように表されます。



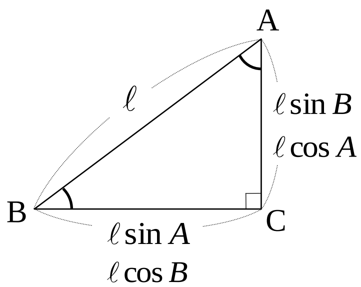
$3:5$ の比の値は $\dfrac{3}{5}$ $\rightarrow$ $\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$

$4:5$ の比の値は $\dfrac{4}{5}$ $\rightarrow$ $\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$

さらに，斜辺 AB の長さを ℓ とすると，残りの 2 辺 AC と BC の長さは次のように表されます。

$$\mathrm{AC}=\frac{3}{5}\ell \rightarrow \mathrm{AC}=\ell\sin B=\ell\cos A$$

$$\mathrm{BC}=\frac{4}{5}\ell \rightarrow \mathrm{BC}=\ell\sin A=\ell\cos B$$



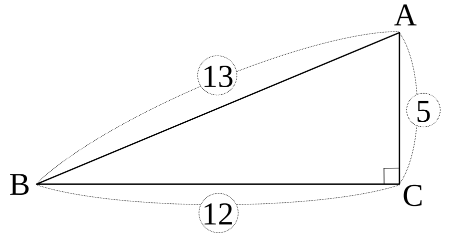
このように，sin，cos の記号を使うと，
角の大きさを辺の比を用いて表したり，
辺の長さを角を用いて表せます。

チェック問題$\boxed{1}$ 類例

例１　$\angle C=90^\circ$ の直角三角形ABCで，３辺の比が

$$AB:BC:CA=13:12:5$$

であるとき



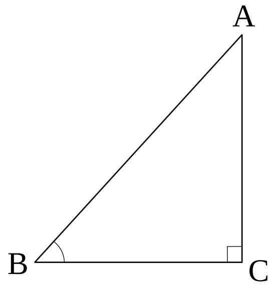
$$\sin A=\frac{12}{13}\qquad \cos A=\frac{5}{13}\qquad \tan A=\frac{12}{5}$$

$$\sin B=\frac{5}{13}\qquad \cos B=\frac{12}{13}\qquad \tan B=\frac{5}{12}$$

例２　$\angle C=90^\circ$ の直角三角形ABCで，$\angle B$ が

$$\cos B=\frac{2}{3}$$

を満たすとき



$$AB:BC=3:2$$

そこで，$AB=3k$，$BC=2k$ （$k>0$）とおくと

$$AC=\sqrt{(3k)^2-(2k)^2}=\sqrt{5k^2}=\sqrt{5}\,k$$

よって

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}k}{3k}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{5}k}{2k}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

さらに，辺ABの長さが12であるならば

$$BC=12\cos B=12\cdot\frac{2}{3}=8 \quad\longleftarrow\quad \frac{BC}{AB}=\cos B \text{ から }\quad BC=AB\cos B$$

$$AC=12\sin B=12\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=4\sqrt{5} \quad\longleftarrow\quad \frac{AC}{AB}=\sin B \text{ から }\quad AC=AB\sin B$$

チェック問題$\boxed{2}$ 解答・解説

解答

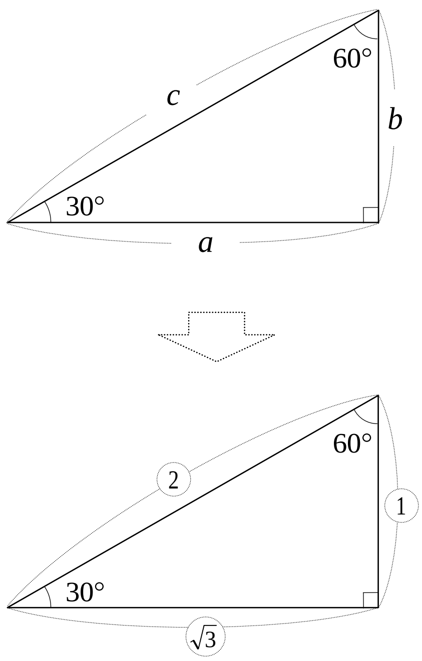
オ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　カ $\dfrac{1}{2}$　キ $\dfrac{1}{2}$　ク $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ケ 60

解説

3 つの角が 30°, 60°, 90° の直角三角形の 3 辺の比は

$$a:b:c=\sqrt{3}:1:2$$

になります。



$a:c=\sqrt{3}:2$ より　$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ←オ

$b:c=1:2$ より　$\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$ ←カ

であり，ここで

$\dfrac{a}{c}$ は　$\cos 30°$　または　$\sin 60°$

$\dfrac{b}{c}$ は　$\sin 30°$　または　$\cos 60°$

と表されます。

ゆえに

$$\sin 30°=\frac{b}{c}=\frac{1}{2} \quad ←キ$$

$$\sin 60°=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ←ク$$

また，$a:b=\sqrt{3}:1$ より　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

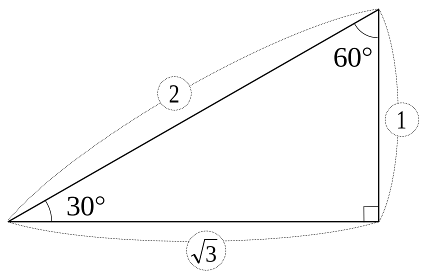
$\dfrac{a}{b}$ は　$\tan 60°$ と表されるので

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}=\tan 60° \quad ←ケ$$

チェック問題$\boxed{2}$ 類例

例１　3つの角が $30°$, $60°$, $90°$ の直角三角形の

3辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ であるから,



$30°$ の角に対する三角比の値は

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

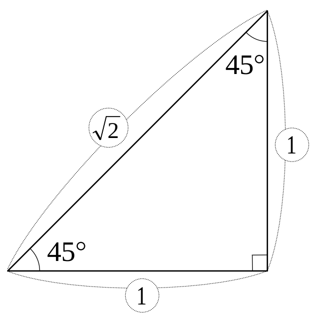
$60°$ の角に対する三角比の値は

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

図をかいて，完ぺきにいえるようになるまで練習する。

例２　3つの角が $45°$, $45°$, $90°$ の直角二等辺三角形の

3辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ であるから,



$45°$ の角に対する三角比の値は

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan 45° = 1$$

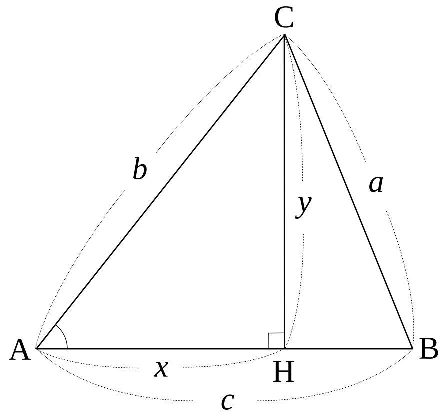
※ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を有理化して $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ としてもよい。

チェック問題 $\boxed{3}$ 解答・解説

解答

コ $b\cos A$　　サ $b\sin A$　　シ $\dfrac{1}{2}bc\sin A$　　ス $b^2+c^2-2bc\cos A$

解説



直角三角形CAHにおいて

$\dfrac{x}{b}=\cos A$ より　$x=b\cos A$ ←コ

$\dfrac{y}{b}=\sin A$ より　$y=b\sin A$ ←サ

よって，△ABCの面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}cy=\frac{1}{2}c(b\sin A)=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{←シ}$$

また，直角三角形CHBにおいて，三平方の定理から

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2 \\ &= (c-x)^2+y^2 \\ &= c^2-2cx+x^2+y^2 \\ &= (x^2+y^2)+c^2-2cx \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

ここで直角三角形CAHにおいて，
三平方の定理から　$x^2+y^2=b^2$

これと $x=b\cos A$ を $(*)$ に代入すると

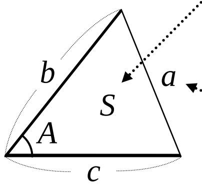
$$a^2=b^2+c^2-2c(b\cos A)$$

すなわち

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \text{←ス}$$

上のシとスの式は，三角形の辺や面積を求める公式であり，
次のように使うことができます。

三角形において
2辺の長さ b，c と
その間の角の大きさ A
が与えられたとき



三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

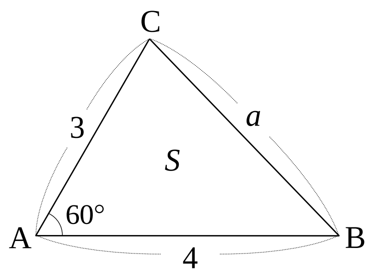
覚える！

残りの辺の長さ a は

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

チェック問題$\boxed{3}$ 類例

例１　$\angle\mathrm{A}=60°$，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$の△ABCがある。
△ABCの面積Sと，辺BCの長さaを求めよ。



$\angle\mathrm{A}=60°$より

$$\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos A=\cos 60°=\frac{1}{2}$$

面積Sを求める公式　$S=\frac{1}{2}bc\sin A$　に，

$b=3$，$c=4$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$をあてはめて

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

次に，辺の長さaを求める公式　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　に，

$b=3$，$c=4$，$\cos A=\frac{1}{2}$をあてはめて

$$a^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=9+16-12=13$$

$a>0$より　$a=\sqrt{13}$

例２　$\angle\mathrm{B}=45°$，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$の△ABCがある。
△ABCの面積Sと，辺ACの長さbを求めよ。

$\angle\mathrm{B}=45°$より

$$\sin B=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos B=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

面積Sを求める公式　$S=\frac{1}{2}ca\sin B$　に，

$c=5$，$a=3\sqrt{2}$，$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$をあてはめて

$$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{15}{2}$$

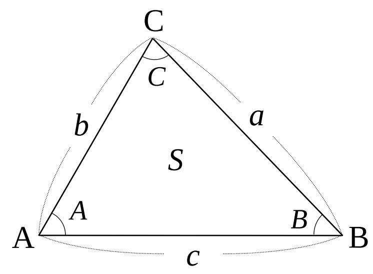
次に，辺の長さbを求める公式　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$　に，

$c=5$，$a=3\sqrt{2}$，$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$をあてはめて

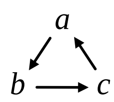
$$a^2=5^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 5\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=25+18-30=13$$

$b>0$より　$b=\sqrt{13}$

下の図のように，
　Aの角の対辺をa
　Bの角の対辺をb
　Cの角の対辺をc
とするとき



$A\to B\to C$
$a\to b\to c$
$b\to c\to a$
$c\to a\to b$



の順に書きかえて

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$\to\ S=\frac{1}{2}ca\sin B$$
$$\to\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$\to\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$\to\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

と書くことができます。

チェック問題$\boxed{4}$ 解答・解説

解答

セ 90　　ソ $\dfrac{a}{2\sin A}$

解説

$\angle$DBCは半円の弧に対する円周角であるから

$$\angle \mathrm{DBC}=90^\circ \quad \leftarrow セ$$

直角三角形CDBにおいて

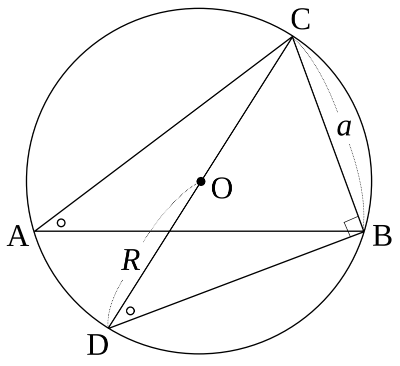
$$\sin D=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{DC}}$$

ここで，OC＝OD＝R（円Oの半径）より

$$\mathrm{DC}=2R$$

と表せるので

$$\sin D=\frac{a}{2R} \quad \cdots\cdots ①$$



また，$\angle$CDBと$\angle$CABはともに弧BCに対する円周角であるから

$$\angle \mathrm{CDB}=\angle \mathrm{CAB}$$

すなわち　$D=A$より

$$\sin D=\sin A \quad \cdots\cdots ②$$

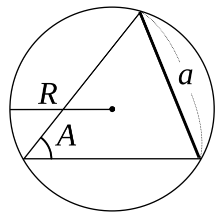
①，②から　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$

$$2R\sin A=a$$

ゆえに　$R=\dfrac{a}{2\sin A}$　←ソ

上のソの式は，三角形の外接円の半径を求める公式であり，
次のように使うことができます。

三角形において
1つの角の大きさAと
その対辺の長さa
が与えられたとき



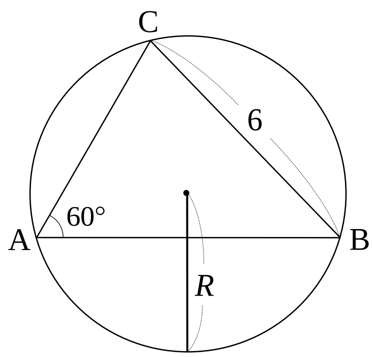
覚える！

外接円の半径Rは

$$R=\frac{a}{2\sin A}$$

チェック問題 4 類例

例１ $\angle \mathrm{A}=60^\circ$，$\mathrm{BC}=6$ の$\triangle \mathrm{ABC}$について，その外接円の半径 R を求めよ。



$\angle \mathrm{A}=60^\circ$ より　$\sin A=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

外接円の半径 R を求める公式　$R=\dfrac{a}{2\sin A}$　に，

$a=6$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をあてはめて

$$R=\frac{6}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

例２ $\angle \mathrm{C}=45^\circ$ の$\triangle \mathrm{ABC}$について，その外接円の半径が 8 であるとき，辺 AB の長さ c を求めよ。

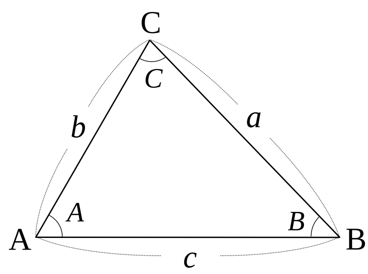
$\angle \mathrm{C}=45^\circ$ より　$\sin C=\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

公式　$R=\dfrac{c}{2\sin C}$　を変形して　$c=2R\sin C$

これに　$R=8$，$\sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をあてはめて

$$c=2\cdot 8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{16}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$$

下の図のように，
A の角の対辺を a
B の角の対辺を b
C の角の対辺を c
とするとき



$A\to B\to C$
$a\to b\to c$
の順に書きかえて

$$R=\frac{a}{2\sin A}$$
$$\to R=\frac{b}{2\sin B}$$
$$\to R=\frac{c}{2\sin C}$$

と書くことができます。