やり直し　高校数学ＩＡ

# 場合の数と確率

本書の構成



初級編・中級編・上級編の３段階に分けて

理解度チェック問題

各問題の解答・解説

各問題の類例

という構成になっています。

「大学や医療系専門学校の受験に数学が必要だけど勉強がはかどらない」という人を対象に、初歩から効率良くポイントを理解できるようにつくられています。

# 理解度チェック問題

※次ページ以降に，各問題の**解答・解説・類例**があります。

次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数を答えなさい。

$\boxed{1}$　１から９までの自然数を１つずつ書いた9枚のカードがある。１から４までのカードから1枚引き，５から９までのカードから1枚引くことにする。
このとき，引いた2枚のカードの数字について
　積が奇数になる引き方は $\boxed{ア}$ 通り
　積が偶数になる引き方は $\boxed{イ}$ 通り
である。

ア＿＿＿＿＿＿
イ＿＿＿＿＿＿

$\boxed{2}$　１から９までの自然数を１つずつ書いた9枚のカードがある。
この中から1枚ずつカードを引いていくとき
　2枚目までの引き方は $\boxed{ウ}$ 通り
　4枚目までの引き方は $\boxed{エ}$ 通り
である。ただし，引いたカードは元に戻さないものとする。
また，3枚のカードを同時に取るとき，カードの取り方は $\boxed{オ}$ 通りある。

ウ＿＿＿＿＿＿
エ＿＿＿＿＿＿
オ＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$　箱の中に，１から９までの自然数を１つずつ書いた9枚のカードが入っている。
箱の中から1枚ずつ続けて3枚のカードを取り，取った順に左から並べて３桁の整数をつくる。
このとき，同様に確からしい事象は $\boxed{カ}$ 個あり，つくった整数が650以上になる確率は $\boxed{キ}$ である。
また，箱の中から3枚のカードを同時に取るとき，取り出したカードの数字の和が奇数になる確率は $\boxed{ク}$ である。

カ＿＿＿＿＿＿
キ＿＿＿＿＿＿
ク＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$　大中小の３つの箱と，１から９までの自然数を１つずつ書いた9枚のカードがある。
小の箱に１，２のカードを，中の箱に３，４，５のカードを，大の箱に６，７，８，９のカードを入れて，それぞれの箱から1枚ずつ計3枚を無作為に取るとき，取り出したカードの数字について
　和が10になる確率は $\boxed{ケ}$
　積が奇数になる確率は $\boxed{コ}$
である。

ケ＿＿＿＿＿＿
コ＿＿＿＿＿＿

# チェック問題 1 解答・解説(1)

## 解答

ア 6　　イ 14

## 解説

はじめに，
「１から４までのカードから奇数のカードを引く」という事柄を $A$
「１から４までのカードから偶数のカードを引く」という事柄を $B$
「５から９までのカードから奇数のカードを引く」という事柄を $C$
「５から９までのカードから偶数のカードを引く」という事柄を $D$
とします。

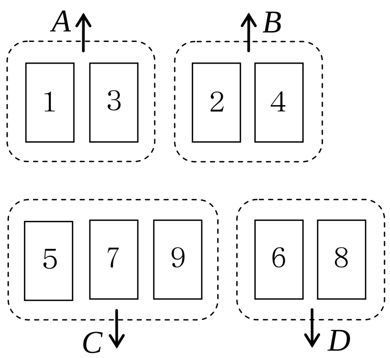
これらの事柄の起こり方がそれぞれ何通りであるかを求めると，
次のようになります。

事柄 $A$ ：「１のカードを引く」「３のカードを引く」の２通り

事柄 $B$ ：「２のカードを引く」「４のカードを引く」の２通り

事柄 $C$ ：「５のカードを引く」「７のカードを引く」
「９のカードを引く」の3通り

事柄 $D$ ：「６のカードを引く」「８のカードを引く」の２通り




カードの数字の積が奇数になるのは，

２枚とも奇数のカードを引くとき

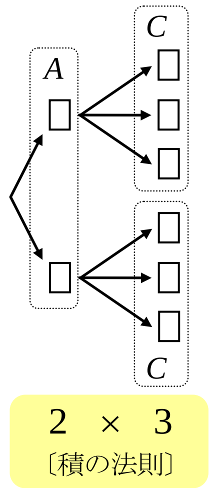
すなわち

事柄 $A$ が起こり，かつ，事柄 $C$ も起こる場合

である。
よって，求める場合の数は，積の法則により

$2\times3=6$（通り）←ア

$A$ の起こり方は2通り
$C$ の起こり方は3通り
であるから，
$A$ と $C$ がどちらも起こる
場合の数は　$2\times3$（通り）




次に，カードの数字の積が偶数になるのは，

２枚とも偶数のカードを引くとき，
または，奇数と偶数のカードを1枚ずつ引くとき

であり，次の３つの場合に分けて考えられます。

(1) 事柄 $B$ が起こり，かつ，事柄 $D$ も起こる場合
(2) 事柄 $A$ が起こり，かつ，事柄 $D$ も起こる場合
(3) 事柄 $B$ が起こり，かつ，事柄 $C$ も起こる場合

# チェック問題 1 解答・解説(2)

## 解説

(1)の場合は　$2\times2=4$（通り）
(2)の場合は　$2\times2=4$（通り）
(3)の場合は　$2\times3=6$（通り）

よって，求める場合の数は，和の法則により

$4+4+6=14$（通り）←イ

$B$ かつ $D$ が起こる場合は，4通り
$A$ かつ $D$ が起こる場合は，4通り
$B$ かつ $C$ が起こる場合は，6通り

| | |
|---|---|
| $A$ かつ $C$ が起こる | $A$ かつ $D$ が起こる |
| $B$ かつ $C$ が起こる | $B$ かつ $D$ が起こる |

これら場合は重複していないから，
このうちのどれかが起こる場合は

$4+4+6=14$（通り）
〔和の法則〕

また，次のように考えることもできます。
起こりうるすべての場合(カードのすべての引き方)は
$4\times5=20$（通り）
これから，$A$ かつ $C$ が起こる場合を除いて
$20-6=14$（通り）

# チェック問題$\boxed{1}$ 類例

**例１**　大中小３個のさいころを投げるとき，次の目の出方は何通りあるか。

(1) ６の目が出ない目の出方

大のさいころの目の出方は，１の目から５の目までの ５通り
中のさいころの目の出方は，１の目から５の目までの ５通り
小のさいころの目の出方は，１の目から５の目までの ５通り

よって，求める場合の数は，積の法則により

$5 \times 5 \times 5 = 125$（通り）

(2) １つのさいころだけが６の目である目の出方

大のさいころだけが６の目のとき
中のさいころの目の出方は５通り
小のさいころの目の出方は５通り
であるから，
積の法則により　$5 \times 5 = 25$（通り）

同様にして，
中のさいころだけが６の目のとき $5 \times 5 = 25$（通り）
小のさいころだけが６の目のとき $5 \times 5 = 25$（通り）

よって，求める場合の数は，和の法則により

$25 + 25 + 25 = 75$（通り）

**例２**　男子12人と女子10人がいる。このうち，男子の７人と女子の６人が子どもである。
男子と女子から1人ずつ選ぶのに，1人だけが子どもになる選び方は何通りあるか。

男子の子どもを選び，かつ，女子の大人を選ぶ場合は，
積の法則により

$7 \times (10 - 6) = 28$（通り）

男子の大人を選び，かつ，女子の子どもを選ぶ場合は，
積の法則により

$(12 - 7) \times 6 = 30$（通り）

よって，求める場合の数は，和の法則により

$28 + 30 = 58$（通り）

# チェック問題 $\boxed{2}$ 解答・解説(1)

## 解答

ウ　72　　エ　3024　　オ　84

## 解説

1枚ずつカードを引いていくとき

1枚目は，9枚のカードの中から引くので　9通り
2枚目は，1枚目を除いたカードの中から引くので　$9-1=8$（通り）

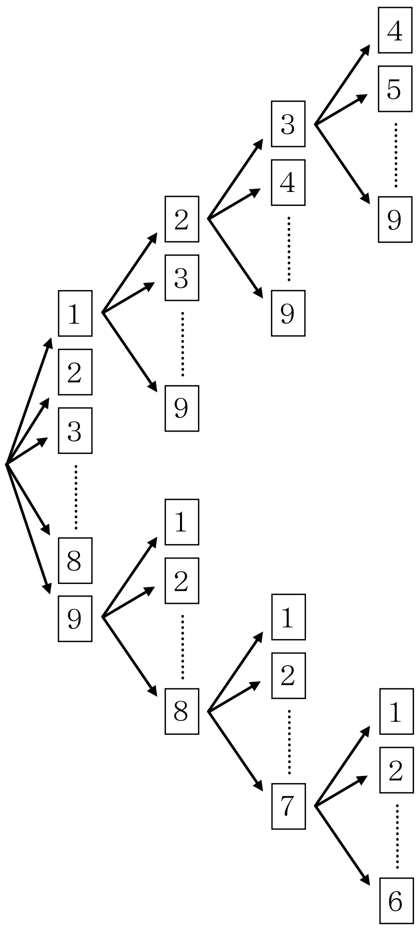
よって，2枚目までの引き方は，積の法則により

$9\cdot8=72$（通り）←ウ

さらに
3枚目は，1枚目と2枚目を除くから　$9-2=7$（通り）
4枚目は，1枚目から3枚目までを除くから　$9-3=6$（通り）

したがって，4枚目までの引き方は，積の法則により

$9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$（通り）←エ



9枚のカードから4枚を取って1列に並べると，
右の樹形図のような並びになります。
この並びを

9個から4個を取った順列

といいます。

この順列の総数は，先ほど求めたように
$9\cdot8\cdot7\cdot6$
の計算式で表され，これを記号Pを使って

${}_9\mathrm{P}_4$

と表すことにします。

すなわち，9個から4個を取った順列の総数は

${}_9\mathrm{P}_4=9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$（通り）

と求められます。

記号Pの使い方を覚える。
${}_9\mathrm{P}_1=9$
${}_9\mathrm{P}_2=9\cdot8$
${}_9\mathrm{P}_3=9\cdot8\cdot7$
${}_9\mathrm{P}_4=9\cdot8\cdot7\cdot6$
${}_9\mathrm{P}_5=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$
${}_9\mathrm{P}_6=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$
${}_9\mathrm{P}_7=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$
${}_9\mathrm{P}_8=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$
${}_9\mathrm{P}_9=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

# チェック問題$\boxed{2}$ 解答・解説(2)

## 解説

次に，９枚のカードから３枚のカードを同時に取るときを考えます。

このときの１つ１つの取り方は順序を無視していますが,
取った３枚のカードを順に並べたとすれば,
それぞれの並び方は $3\cdot2\cdot1$（通り）ずつあり,
その順列の総数は $9\cdot8\cdot7$（通り）になります。
たとえば
２，５，８のカードを取ったとき，その並び方は $3\cdot2\cdot1$（通り）
１，４，９のカードを取ったとき，その並び方は $3\cdot2\cdot1$（通り）
２，４，８のカードを取ったとき，その並び方は $3\cdot2\cdot1$（通り）

ゆえに，３枚のカードの取り方が $x$ 通りあるとすれば

$$x\times(3\cdot2\cdot1)=9\cdot8\cdot7$$

が成り立ちます。

よって　$x=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

すなわち，３枚のカードの取り方は 84通り ←オ

９枚のカードから３枚を取ってできた組を

９個から３個を取った組合せ

といいます。

この組合せの総数は，先ほど求めたように

$$\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}$$

の計算式で表され，これを記号Ｃを使って

$${}_9C_3$$

と表すことにします。

すなわち，９個から３個を取った組合せの総数は

$${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84\text{（通り）}$$

と求められます。

記号Ｃの使い方を覚える。

$${}_9C_1=\frac{9}{1}\qquad {}_9C_8=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$${}_9C_2=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\qquad {}_9C_7=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\qquad {}_9C_6=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$${}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\qquad {}_9C_5=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

# チェック問題$\boxed{２}$ 類例

**例１**　異なる６個のものから いくつかのものを取ったときの
順列と組合せの総数を求めると，

順列は

$_6P_1=6$　　$_6P_2=6\cdot5=30$　　$_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$

$_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$　　$_6P_5=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=720$　　$_6P_6=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

組合せは

$_6C_1=\dfrac{6}{1}=6$　　$_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$　　$_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

$_6C_4=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$　　$_6C_5=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=6$

**例２**　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの５個の文字がある。
次の並び方や選び方の総数を求めよ。

(1)　５個の文字から３個の文字を選んで１列に並べる。

$_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$（通り）

(2)　５個の文字すべてを１列に並べる。

$_5P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$（通り）

ここで，$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$は 1から5までの自然数の積であり，
これを $5!$（5の階乗）と表します。

よって，異なる５個のものすべてを並べる順列の総数は

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$（通り）

(3)　５個の文字から３個の文字を選ぶ。

$_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$（通り）

また，次のように求めることができます。
３個の文字を選ぶ組合せの総数は，選んでいない２個の
文字の組合せの総数に等しいから

$_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り）

# チェック問題$\boxed{3}$ 解答・解説(1)

## 解答

カ 504　　キ $\dfrac{49}{126}$　　ク $\dfrac{10}{21}$

## 解説

「9枚のカードから3枚のカードを取って並べる」という試行によって起こる事柄(事象)は，

9個から3個を取った順列

で表され，その総数は

$${}_9P_3 = 9\cdot 8\cdot 7 = 504 \text{(通り)}$$

になります。

この504通りの順列で表される事象をまとめて 全事象 といい，そのうち１つ１つの事象は

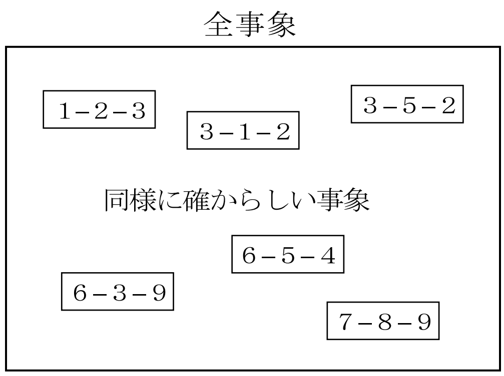
同様に確からしい

と考えられます。

たとえば

１，２，３の順にカードを取り出す事象と
６，５，４の順にカードを取り出す事象は，
同じ程度に起こるものである

といえます。




ゆえに，同様に確からしい事象は 504個 ←カ

さらに，504個の事象のうち，650以上の整数をつくる事象がいくつあるかを，次の２つの場合に分けて考えます。

(1) 1枚目に７以上のカードを取る
(2) 1枚目に６のカードを取る

(1)の場合

1枚目は，７，８，９のカードから取るので 3通り
2枚目と3枚目は，1枚目を除いた8枚から２枚を取った順列であるので ${}_8P_2$ 通り
よって，積の法則により $3\times {}_8P_2 = 3\times 56 = 168$ (通り)

(2)の場合

1枚目は，６のカードを取るので 1通り
2枚目は，５，７，８，９のカードから取るので ４通り
3枚目は，1枚目と２枚目を除いたカードの中から取るので $9-2=7$ (通り)

よって，積の法則により $1\times 4\times 7 = 28$ (通り)

# チェック問題$\boxed{３}$ 解答・解説(2)

## 解説

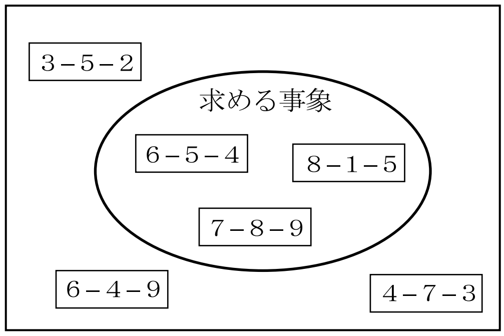
(1)，(2)から，650 以上の整数をつくる場合は，

和の法則により　$168+28=196$（通り）

全事象において 同様に確からしい事象が504 個あり，
そのうち 求める事象が196 個あるから，

求める事象が起こる確率は　$\dfrac{196}{504}=\dfrac{49}{126}$　←キ

全事象




また，試行「9 枚のカードから 3 枚のカードを同時に取る」
によって起こる事象は，
　　9 個から 3 個を取った組合せ
で表され，その総数は

$${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84\ (\text{通り})$$

になります。
この 84 通りの組合せで表される１つ１つの事象は

同様に確からしい

といえます。
これらの事象のうち，数字の和が奇数になる場合は

(1)　3 枚とも奇数のカードを取る
(2)　奇数のカードを1枚，偶数のカードを 2 枚取る

(1) の場合
１，３，５，７，９の 5 枚のカードから 3 枚を取った組合せ
であるので ${}_5C_3$ 通り

(2) の場合
１，３，５，７，９の 5 枚のカードから1枚を取り，かつ，
２，４，６，８の 4 枚のカードの中から 2 枚を取るので，

積の法則により　${}_5C_1\times{}_4C_2$（通り）

(1)，(2)から，数字の和が奇数になる場合は，
和の法則により

$${}_5C_3+{}_5C_1\times{}_4C_2=10+5\times6=40\ (\text{通り})$$

よって，求める事象の確率は　$\dfrac{40}{84}=\dfrac{10}{21}$　←ク

# チェック問題$\boxed{3}$ 類例

**例１**　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇの文字を１つずつ書いた７枚のカードがある。この中から1枚ずつ続けて5枚のカードを取り，取った順に左から並べるとき，両端がＡとＢのカードである確率を求めよ。

７枚のカードから５枚のカードを取って並べる順列は ${}_7\mathrm{P}_5$ 通り

このうち，両端がＡとＢのカードである並び方を考えると

1枚目と5枚目の並び方は，ＡとＢのカードの順列であるので $2!$ 通り

２枚目から４枚目までの並び方は，ＡとＢ以外の５枚のカードから

３枚を取った順列であるので ${}_5\mathrm{P}_3$ 通り

よって，積の法則により，$2!\times{}_5\mathrm{P}_3$ 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{2!\times{}_5\mathrm{P}_3}{{}_7\mathrm{P}_5}=\frac{2\cdot1\times5\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{1}{21}$$

**例２**　男子６人，女子４人の合計10人の中から３人を選ぶとき，男子２人，女子1人が選ばれる確率を求めよ。

10人の中から３人を選ぶ組合せは ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り

このうち，男子２人，女子1人の選び方を考えると

男子２人の選び方は，６人から２人を選ぶ組合せであるので ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り

女子1人の選び方は，４人から1人を選ぶ組合せであるので ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り

よって，積の法則により，${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1$ 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\frac{4}{1}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{2}$$

# チェック問題$\boxed{4}$ 解答・解説

## 解答

ケ $\dfrac{1}{24}$　　　コ $\dfrac{1}{6}$

## 解説

数字の和が10になるのは，次の３つの事象が同時に起こる場合です。

小の箱から１のカードを取る
中の箱から３のカードを取る
大の箱から６のカードを取る

３つの事象をそれぞれ $A,\ B,\ C$ とすると

事象 $A$ の確率は，２枚のカードから1枚を取るから $\dfrac{1}{2}$

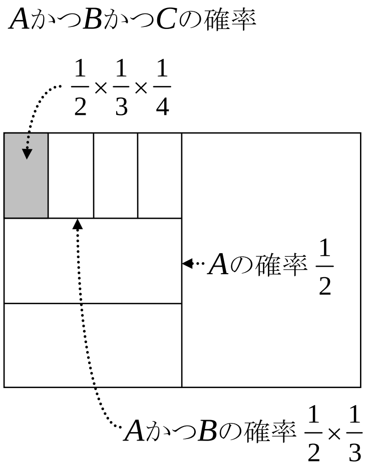
事象 $B$ の確率は，３枚のカードから1枚を取るから $\dfrac{1}{3}$

事象 $C$ の確率は，４枚のカードから1枚を取るから $\dfrac{1}{4}$

ここで

$A$ が起こり，かつ，$B$ も起こる確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$ で求められ，

$A,\ B,\ C$ が同時に起こる確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}$ で求められます。




よって，数字の和が10になる確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$　←ケ

また，数字の積が奇数になるのは，３枚とも奇数のカードを取る場合です。

小の箱から奇数のカードを取る確率は，１のカードを取るから $\dfrac{1}{2}$

中の箱から奇数のカードを取る確率は，３または５のカードを取るから $\dfrac{2}{3}$

大の箱から奇数のカードを取る確率は，７または９のカードを取るから $\dfrac{2}{4}$

よって，数字の積が奇数になる確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{6}$　←コ

# チェック問題$\boxed{4}$ 類例

**例１**　大中小の3個のさいころを投げるとき，大のさいころは2の目，中のさいころは5以上の目，小のさいころは奇数の目が出る確率を求めよ。

大のさいころが2の目である確率は $\dfrac{1}{6}$

中のさいころが5以上の目である確率は，

5の目または6の目が出るときであるから $\dfrac{2}{6}$

小のさいころが奇数の目である確率は，

1，3，5のいずれかの目が出るときであるから $\dfrac{3}{6}$

よって，求める確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{36}$

**例２**　Ａの袋には赤玉4個と白玉5個，Ｂの袋には赤玉2個と白玉8個が入っている。ＡとＢの袋から1個ずつ計2個の玉を取り出すとき，取り出した玉がともに赤玉である確率を求めよ。

Ａの袋には$4+5=9$(個)の玉が入っている。

Ａの袋から赤玉を取り出す確率は，

9個の玉からの取り方が4通りあるので $\dfrac{4}{9}$

Ｂの袋には$2+8=10$(個)の玉が入っている。

Ｂの袋から赤玉を取り出す確率は，

10個の玉からの取り方が2通りあるので $\dfrac{2}{10}$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{4}{45}$