やり直し　高校数学ＩＡ

２次関数

本書の構成

初級編・中級編・上級編の３段階に分けて

理解度チェック問題

各問題の解答・解説

各問題の類例

という構成になっています。

「大学や医療系専門学校の受験に数学が必要だけど勉強がはかどらない」という人を対象に、初歩から効率良くポイントを理解できるようにつくられています。

理解度チェック問題

※次ページ以降に，各問題の**解答・解説・類例**があります。

次の $\boxed{}$ にあてはまる数や式, ことばを答えなさい。

1 2次関数 $y=2x^2-6x-8$ を平方完成すると

$y=\boxed{ア}$

であるから

座標平面上で，放物線 $y=2x^2-6x-8$ の

軸の方程式は $\boxed{イ}$

頂点の座標は $\boxed{ウ}$

である。

ア＿＿＿＿＿＿

イ＿＿＿＿＿＿

ウ＿＿＿＿＿＿

2 x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ であるとき

2次関数 $y=2x^2-6x-8$ は

$x=\boxed{エ}$ のとき 最大値 $\boxed{オ}$ をとり,

$x=\boxed{カ}$ のとき 最小値 $\boxed{キ}$ をとる。

エ＿＿＿＿＿＿

オ＿＿＿＿＿＿

カ＿＿＿＿＿＿

キ＿＿＿＿＿＿

3 座標平面上で， $y=2x^2-6x-8$ のグラフと

x 軸との共有点の座標は

$\boxed{ク}$ と $\boxed{ケ}$

であり，このことを利用して

2次不等式 $2x^2-6x-8<0$ の解は

$\boxed{コ}$

2次不等式 $2x^2-6x-8 \geqq 0$ の解は

$\boxed{サ}$

といえる。

ク＿＿＿＿＿＿

ケ＿＿＿＿＿＿

コ＿＿＿＿＿＿

サ＿＿＿＿＿＿

4 2次方程式 $2x^2-6x-3=0$ の判別式を D と

すると

$D=\boxed{シ}$

よって，この2次方程式の解は $\boxed{ス}$ 個である。

また，座標平面上で， $y=2x^2-6x+5$ のグラフ

と x 軸との共有点は $\boxed{セ}$ 個であり,

2次不等式 $2x^2-6x+5>0$ の解は

$\boxed{ソ}$

である。

シ＿＿＿＿＿＿

ス＿＿＿＿＿＿

セ＿＿＿＿＿＿

ソ＿＿＿＿＿＿

チェック問題$\boxed{1}$ 解答・解説(1)

解答

ア $2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{25}{2}$　　イ $x=\dfrac{3}{2}$　　ウ $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{25}{2}\right)$

解説

$y=2x^2-6x-8$ を平方完成するとは,

$y=2x^2-6x-8=\bigcirc(x+\square)^2+\triangle$ のように変形することです。

次の手順を覚えてください。

① $2x^2-6x$ を x^2 の係数2でくくると　$y=2(x^2-3x)-8$

② x^2-3x を $(x+\square)^2+\triangle$ の形にするのに,

□に -3 の半分の $-\dfrac{3}{2}$ をあてはめて

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

よって　$x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

③ ①，②から

$$\begin{aligned}
y&=2(x^2-3x)-8\\
&=2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-8\\
&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-8\\
&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{9}{4}-8\\
&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}-\frac{16}{2}\\
&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}\ \leftarrow ア
\end{aligned}$$

$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2=x^2+ax+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

であるから

$x^2+ax=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

チェック問題 1 解答・解説(2)

解説

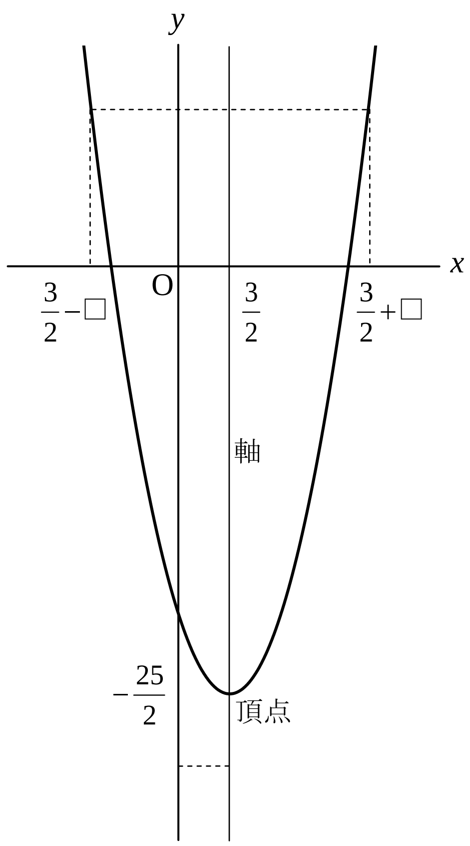
2 次関数 $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$ において，

$x=\frac{3}{2}+\square$ のときの y の値と $x=\frac{3}{2}-\square$ のときの y の値は等しくなります。

たとえば，

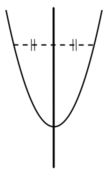
$x=\frac{3}{2}+5$ のとき $y=2\cdot5^2-\frac{25}{2}=\frac{75}{2}$

$x=\frac{3}{2}-5$ のとき $y=2\cdot(-5)^2-\frac{25}{2}=\frac{75}{2}$



このことから， $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$ のグラフは，

直線 $x=\frac{3}{2}$ に関して対称である



といえます。

ゆえに，2 次関数 $y=2x^2-6x-8$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフが平行移動した放物線で，
その（対称の）軸の方程式は

$x=\frac{3}{2}$ ←イ

放物線 $y=2x^2-6x-8$ の頂点は，

放物線 $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$ と 軸 $x=\frac{3}{2}$ との交点で，

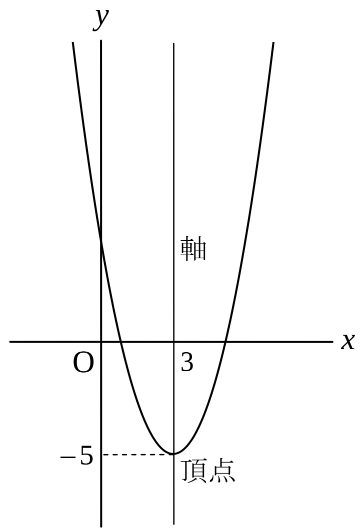
$x=\frac{3}{2}$ のとき $y=2\cdot0^2-\frac{25}{2}=-\frac{25}{2}$

であるから，頂点の座標は

$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{25}{2}\right)$ ←ウ

チェック問題$\boxed{1}$ 類例(1)

例１　$y=x^2-6x+4$ を平方完成すると



$$y=\left(x^2-6x\right)+4$$

$$=\left(x-3\right)^2-3^2+4$$

$$=\left(x-3\right)^2-5$$

よって，放物線 $y=x^2-6x+4$ の

軸の方程式は　$x=3$

頂点の座標は　$\left(3,\ -5\right)$

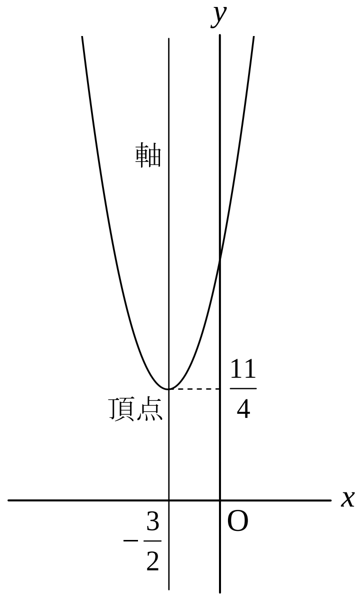
例２　$y=x^2+3x+5$ を平方完成すると

$$y=\left(x^2+3x\right)+5$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+5$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{20}{4}$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$



よって，放物線 $y=x^2+3x+5$ の

軸の方程式は　$x=-\dfrac{3}{2}$

頂点の座標は　$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{4}\right)$

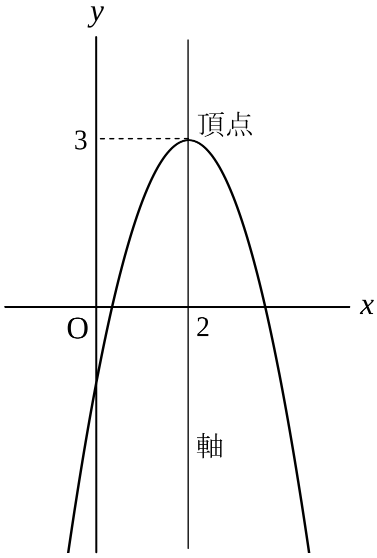
チェック問題$\boxed{1}$ 類例(2)

例３　$y=-x^2+4x-1$を平方完成すると

$$y=-\left(x^2-4x\right)-1$$
$$=-\left\{\left(x-2\right)^2-2^2\right\}-1$$
$$=-\left(x-2\right)^2+2^2-1$$
$$=-\left(x-2\right)^2+3$$

よって，放物線$y=-x^2+4x-1$の

軸の方程式は　$x=2$
頂点の座標は　$\left(2,\ 3\right)$



$y=-x^2+4x-1$のグラフは，
$y=-x^2$を平行移動した放物線です。

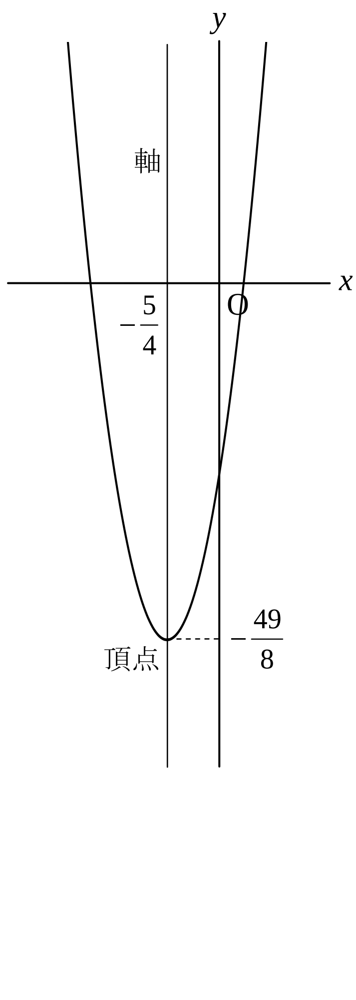
例４　$y=2x^2+5x-3$を平方完成すると

$$y=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)-3$$
$$=2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}-3$$
$$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-3$$
$$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}-\frac{24}{8}$$
$$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$$

よって，放物線$y=2x^2+5x-3$の

軸の方程式は　$x=-\frac{5}{4}$

頂点の座標は　$\left(-\frac{5}{4},\ -\frac{49}{8}\right)$



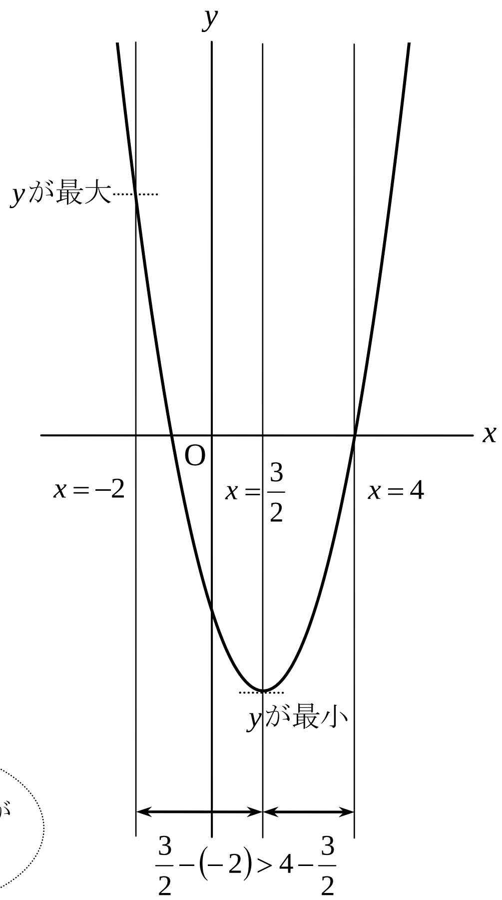
チェック問題 $\boxed{2}$ 解答・解説

解答

エ　-2　　　オ　12　　　カ　$\dfrac{3}{2}$　　　キ　$-\dfrac{25}{2}$

解説

2 次関数 $y=2x^2-6x-8$ のグラフをかいて
2 直線 $x=-2$，$x=4$ で囲まれる部分に注目します。



$y=2x^2-6x-8=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{25}{2}$　より，

　軸の方程式は　$x=\dfrac{3}{2}$

$-2<\dfrac{3}{2}<4$ より，y の値が最大となるのは
$x=-2$ のときか　$x=4$ のときかのどちらかです。

ここで，

　$x=\dfrac{3}{2}$ と $x=-2$ との距離は　$\dfrac{3}{2}-(-2)=\dfrac{7}{2}$

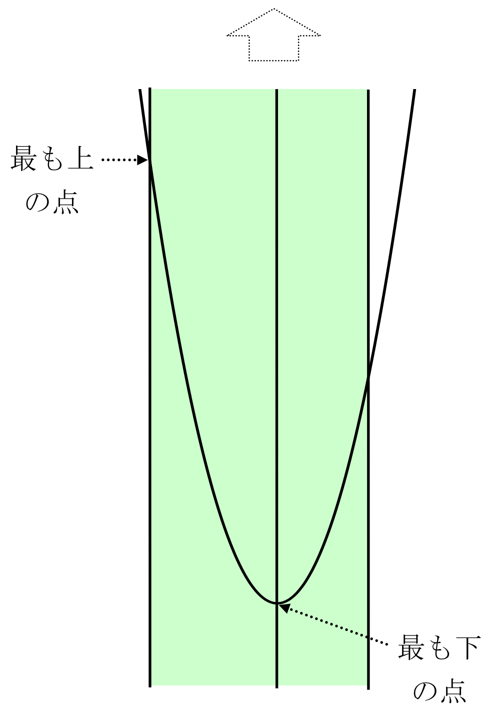
　$x=\dfrac{3}{2}$ と $x=4$ との距離は　$4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$

軸から遠いほうが
y は大きい。

$\dfrac{7}{2}>\dfrac{5}{2}$ であるので

　y の値が最大となるのは　$x=-2$ のとき　←エ

といえます。



よって，最大値は

　$2\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)-8=8+12-8=12$　←オ

また，$-2<\dfrac{3}{2}<4$ より，

　y の値が最小となるのは　$x=\dfrac{3}{2}$ のとき　←カ

といえます。

よって，最小値は，頂点の y 座標に等しく

　$-\dfrac{25}{2}$　←キ

チェック問題$\boxed{2}$ 類例

例１　$0 \leqq x \leqq 5$ のとき，$y=x^2-4x+3$ の最大値と最小値を求めよ。

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ より，

軸の方程式は　$x=2$

$x=0$，$x=5$，$x=2$ の位置関係を考えると

$0<2<5$，$2-0<5-2$

である。

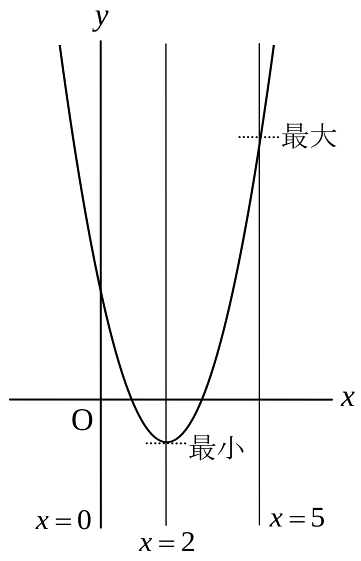
よって，グラフから

$x=5$ のとき y は最大となり，

最大値は $5^2-4\cdot5+3=8$

$x=2$ のとき y は最小となり，

最小値は -1



例２　$-3 \leqq x \leqq 3$ のとき，$y=-x^2+x+5$ の最大値と最小値を求めよ。

$y=-x^2+x+5=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{21}{4}$ より，

軸の方程式は　$x=\dfrac{1}{2}$

$x=-3$，$x=3$，$x=\dfrac{1}{2}$ の位置関係を考えると

$-3<\dfrac{1}{2}<3$，$\dfrac{1}{2}-(-3)>3-\dfrac{1}{2}$

である。

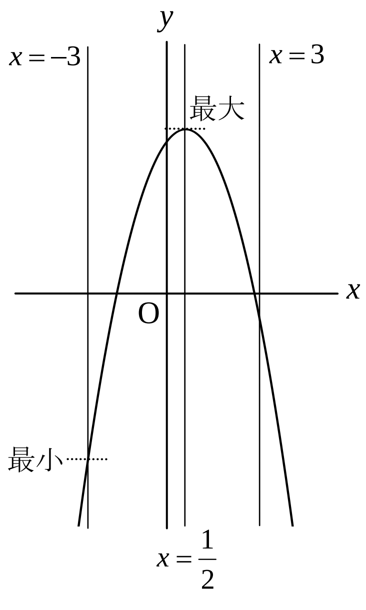
よって，グラフから

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき y は最大となり，

最大値は $\dfrac{21}{4}$

$x=-3$ のとき y は最小となり，

最小値は $-(-3)^2-3+5=-7$



チェック問題 $\boxed{3}$ 解答・解説

解答

ク $(-1,\ 0)$　　ケ $(4,\ 0)$　　コ $-1<x<4$　　サ $x \leqq -1,\ 4 \leqq x$

（ク，ケは順不同）

解説

x 軸の方程式は $y=0$ であるので，
連立方程式

$$\begin{cases} y=2x^2-6x-8 \\ y=0 \end{cases}$$

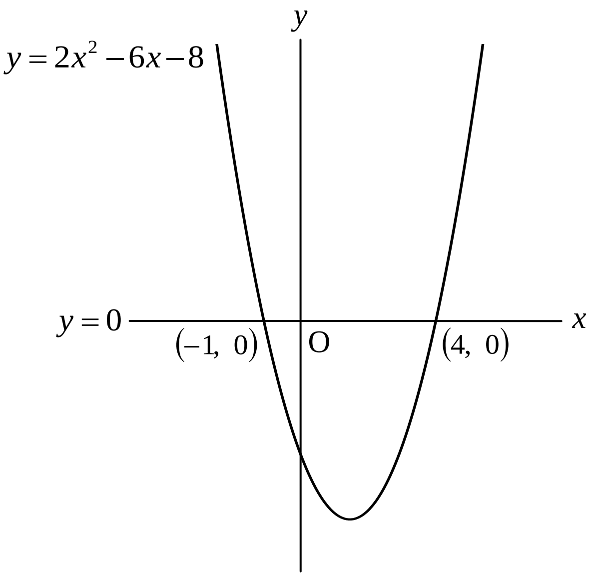
を解いて，共有点の座標を求めます。
$y=2x^2-6x-8$ に $y=0$ を代入すると

$$0=2x^2-6x-8$$

両辺を２でわると

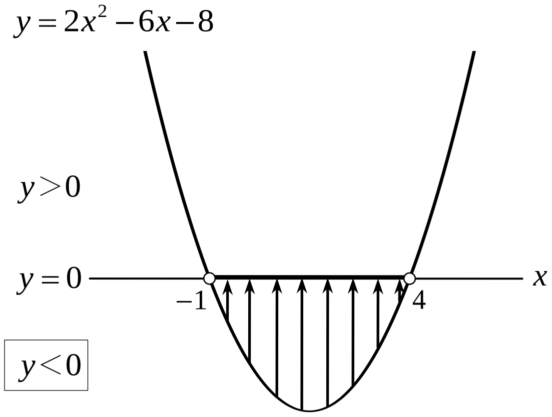
$$x^2-3x-4=0$$
$$(x+1)(x-4)=0$$

よって　$x=-1,\ 4$
ゆえに，２つの共有点の座標は
$(-1,\ 0)$ と $(4,\ 0)$ ←ク，ケ



次に，$y=2x^2-6x-8$ のグラフ上で

$y<0$ となる y に対応する x の値は
-1 より大きく４より小さい範囲
にあります。

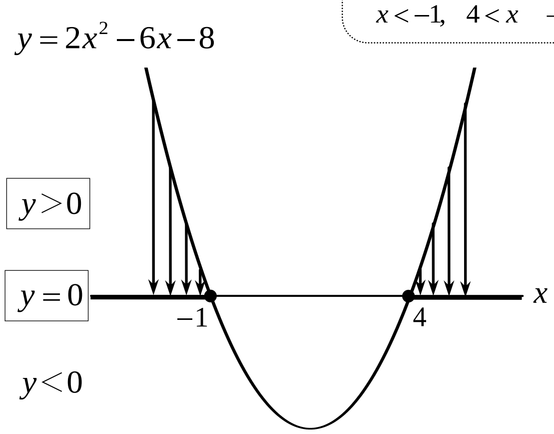


すなわち，
２次不等式 $2x^2-6x-8<0$ の解は

$$-1<x<4 \quad ←コ$$

$x=-1,\ 4$	$\to y=0$
$-1<x<4$	$\to y<0$
$x<-1,\ 4<x$	$\to y>0$

$y \geqq 0$ となる y に対応する x の値は
-1 以下または４以上の範囲
にあります。



すなわち，
２次不等式 $2x^2-6x-8 \geqq 0$ の解は

$$x \leqq -1,\ 4 \leqq x \quad ←サ$$

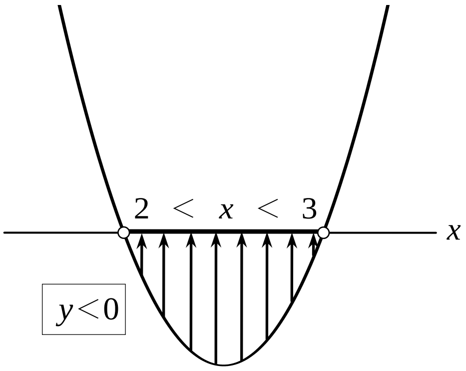
チェック問題$\boxed{3}$ 類例

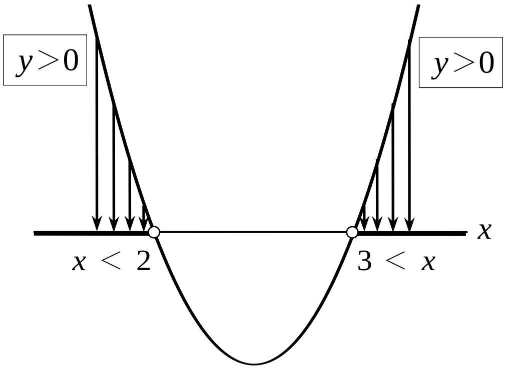
例１　$y=x^2-5x+6$ のグラフと x 軸との共有点を求めるのに,

2次方程式 $x^2-5x+6=0$ を解くと　$(x-2)(x-3)=0$　　$x=2,\ 3$
よって，共有点は $(2,\ 0)$ と $(3,\ 0)$

下のグラフから,
2次不等式 $x^2-5x+6<0$ の解は　$2<x<3$

2次不等式 $x^2-5x+6>0$ の解は　$x<2$，$3<x$





例２　$y=2x^2-6$ のグラフと x 軸との共有点を求めるのに,

2次方程式 $2x^2-6=0$ を解くと　$x^2=3$　　$x=\pm\sqrt{3}$

よって，共有点は $(\sqrt{3},\ 0)$ と $(-\sqrt{3},\ 0)$

2次不等式 $2x^2-6\leqq 0$ の解は　$-\sqrt{3}\leqq x\leqq \sqrt{3}$

2次不等式 $2x^2-6\geqq 0$ の解は　$x\leqq -\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\leqq x$

例３　$y=x^2+4x-1$ のグラフと x 軸との共有点を求めるのに,

2次方程式 $x^2+4x-1=0$ を解くと，解の公式より

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$$

よって，共有点は $(-2+\sqrt{5},\ 0)$ と $(-2-\sqrt{5},\ 0)$

2次不等式 $x^2+4x-1\leqq 0$ の解は　$-2-\sqrt{5}\leqq x\leqq -2+\sqrt{5}$

2次不等式 $x^2+4x-1\geqq 0$ の解は　$x\leqq -2-\sqrt{5}$，$-2+\sqrt{5}\leqq x$

チェック問題 4 解答・解説

解答

シ 60　　ス 2　　セ 0　　ソ すべての数

解説

2 次方程式 $2x^2-6x-3=0$ の解は，解の公式より

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}$$

このとき，$\sqrt{\quad}$ の中の式を判別式といいます。

すなわち，判別式を D とすると

$$D=(-6)^2-4\cdot2\cdot(-3)$$
$$=36+24$$
$$=60 \quad \leftarrow シ$$

判別式が 正(＋) の値をとることから，
この 2 次方程式の解は 2 個である ←ス
といえます。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，
解の公式より

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ここで，$\sqrt{\quad}$ の中の式を判別式
といいます。
すなわち，判別式を D とすると

$$D=b^2-4ac$$

$D=60$ のとき $x=\dfrac{6\pm\sqrt{60}}{4}$

→解は 2 個

$D=-4$ のとき $x=\dfrac{6\pm\sqrt{-4}}{4}$

→$\sqrt{-4}$ は存在しない
→解はない

同様に，2 次方程式 $2x^2-6x+5=0$ の判別式は

$$D=(-6)^2-4\cdot2\cdot5$$
$$=36-40$$
$$=-4$$

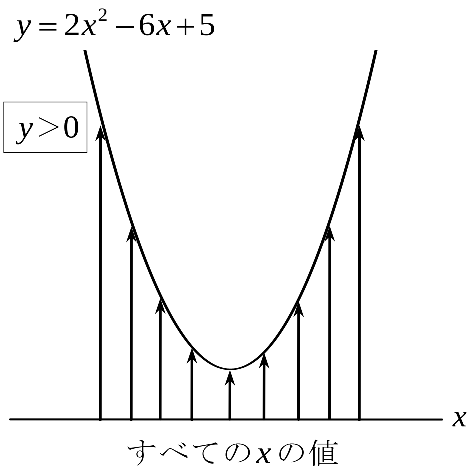
判別式が 負(－) の値をとることから，
この 2 次方程式の解は存在しない といえます。
このことから，
　$y=2x^2-6x+5$ のグラフは x 軸と共有点をもたない

　すなわち　x 軸との共有点は 0 個 ←セ

さらに，右のグラフのように

$y=2x^2-6x+5$ の y の値は
どのような x の値に対しても
$y>0$ を満たす

といえます。
ゆえに，2 次不等式 $2x^2-6x+5>0$ の解は
　　すべての数 ←ソ
となります。



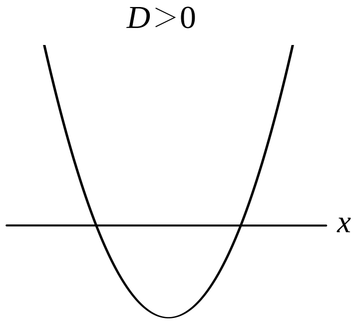
チェック問題$\boxed{4}$ 類例

例１　2次方程式$x^2+3x-2=0$の判別式をDとすると

$$D=3^2-4\cdot1\cdot(-2)$$
$$=9+8$$
$$=17$$

$D>0$より，2次方程式$x^2+3x-2=0$の解は2個である。

よって，$y=x^2+3x-2$のグラフはx軸と2点を共有する。



例２　2次方程式$x^2-3x+4=0$の判別式をDとすると

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot4$$
$$=9-16$$
$$=-7$$

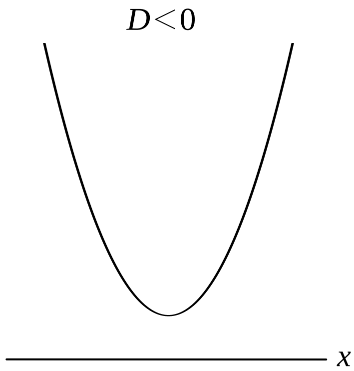
$D<0$より，2次方程式$x^2-3x+4=0$の解はない。

よって，$y=x^2-3x+4$のグラフはx軸と共有点をもたない。

ゆえに，

2次不等式$x^2-3x+4>0$の解は　すべての数

2次不等式$x^2-3x+4<0$の解は　ない



例３　2次方程式$x^2-4x+4=0$の判別式をDとすると

$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot4$$
$$=16-16$$
$$=0$$

$D=0$であるから，$y=x^2-4x+4$のグラフは
x軸と1点を共有する。

また，$y=x^2-4x+4=(x-2)^2$より

放物線$y=x^2-4x+4$の頂点は$(2,\ 0)$であり，

これがx軸との共有点となる。