Brouwer の不動点定理

よしいず

2012-12-23

集合 X の元 x が写像 $f : X \to X$ の不動点であるとは, $f(x) = x$ が成り立つときにいう.

［命題 1］ $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ から $[a, b]$ 自身への連続写像は不動点をもつ.

［証明］ $f : [a, b] \to [a, b]$ を連続写像とする. $a \leq f(a)$ かつ $f(b) \leq b$ である. $f(a) = a$ のとき, a が f の不動点である. 同様に, $f(b) = b$ のとき, b が f の不動点である. $a < f(a)$ かつ $f(b) < b$ のとき, 写像 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $g(x) = f(x) - x$ によって定めると, g は連続写像であり,

$$g(a) = f(a) - a > 0,$$
$$g(b) = f(b) - b < 0$$

であるから, 中間値の定理により, ある $c \in [a, b]$ が存在して, $g(c) = 0$, すなわち $f(c) = c$ であり, c は f の不動点である. $\square$

$n \geq 1$ を整数とする. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の点

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

に対して, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$ を

$$(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

により定める. また,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

を $\boldsymbol{x}$ の長さ (あるいは, ノルム) という. $\|\boldsymbol{x}\|$ は負でない実数であり, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ であるとき, またそのときに限る. ここで, $\boldsymbol{o}$ は原点を表す. さらに, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ がともに $\boldsymbol{o}$ でないとき, Schwarz の不等式により,

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1$$

が成り立つ. したがって, ある実数 θ がただ 1 つ存在して,

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

が成り立つ. この θ を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のなす角という. 幾何的には, 原点 $\boldsymbol{o}$ から点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ へ向かって引いた 2 つの線分の $\boldsymbol{o}$ における角が θ である.

［**補題 2**］$n \geq 1$ を整数, $\mathbb{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を $\mathbb{R}^n$ の点とし, $\|\boldsymbol{y}\| \leq 1$ であるとする．このとき,

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \, \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})^2 \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

が成り立つ.

［**証明**］$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ のときは明らかである．以下, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ はともに $\boldsymbol{o}$ でないとする.

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．2 つの点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の距離は $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ であり, 原点 $\boldsymbol{o}$ と点 $\boldsymbol{y}$ を通る直線への $\boldsymbol{x}$ からの垂線の長さは $\|\boldsymbol{x}\| \sin\theta$ であるから,

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| \sin\theta.$$

一方, $\|\boldsymbol{x}\| \sin\theta \geq 0$ かつ $\|\boldsymbol{y}\| \leq 1$ より,

$$\|\boldsymbol{x}\| \sin\theta \geq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \sin\theta.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &\geq \|\boldsymbol{x}\|^2 \, \|\boldsymbol{y}\|^2 \, \sin^2\theta \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \, \|\boldsymbol{y}\|^2 \, (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \, \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})^2
\end{aligned}$$

となる． □

n 次元球体 D^n および $n-1$ 次元球面 S^{n-1} を

$$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\},$$
$$S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

により定義する．S^{n-1} は D^n の境界である．

［定理 3（Brouwer の不動点定理）］ $n \geq 1$ を整数とする．n 次元球体 D^n から D^n 自身への連続写像は不動点をもつ．

［証明］ $n = 1$ の場合, $D^1 = [-1, 1]$ であるから, 命題 1 より明らかである．

$n \geq 2$ の場合を背理法により証明する．n 次元球体 D^n から D^n 自身への連続写像 $f : D^n \to D^n$ が不動点をもたないと仮定する．そのとき, 各々の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ であるから, $f(\boldsymbol{x})$ から $\boldsymbol{x}$ に向かう半直線を引くことができる．この半直線と S^{n-1} との交点を $r(\boldsymbol{x})$ とする．これにより, 連続写像 $r : D^n \to S^{n-1}$ が定まる．具体的には,

$$r(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + t(\boldsymbol{x}) \big(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})\big)$$

とおく．各々の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して, $\|r(\boldsymbol{x})\| = 1$ となるよ

うに $t(\boldsymbol{x})$ を定める:

$$
\begin{aligned}
t(\boldsymbol{x}) &= \frac{\|f(\boldsymbol{x})\|^2 - (\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x})) + \sqrt{\delta(\boldsymbol{x})}}{\|\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})\|^2}, \\
\delta(\boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})\|^2 + (\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}))^2 \\
&\qquad - \|\boldsymbol{x}\|^2 \, \|f(\boldsymbol{x})\|^2 \\
&= \bigl(1 - (\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{y}))\bigr)^2 \\
&\qquad - \bigl(1 - \|\boldsymbol{x}\|^2\bigr)\bigl(1 - \|f(\boldsymbol{x})\|^2\bigr).
\end{aligned}
$$

ここで, $f(\boldsymbol{x}) \in D^n$ であるから, 補題 2 より, $\delta(\boldsymbol{x}) \geq 0$ である.

$\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ のとき, $t(\boldsymbol{x}) = 1$ となり $r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ が成り立つ. 一方, $S^{n-1} \subseteq D^n$ より, 包含写像

$$
\iota : S^{n-1} \to D^n, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}
$$

が定まる. ゆえに, 合成写像 $r \circ \iota$ は S^{n-1} 上の恒等写像である. このとき, $r \circ \iota$ から誘導されるホモロジー群の準同型写像

$$
r_* \circ \iota_* = (r \circ i)_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})
$$

は恒等写像になる. よって,

$$
\iota_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(D^n)
$$

は単射である．ところが,

$$
\begin{aligned}
H_{n-1}(S^{n-1}) &= \mathbb{Z}, \\
H_{n-1}(D^n) &= 0
\end{aligned}
$$

であるから, ι_* は単射でない．これは矛盾である． $\square$

参考文献

[1] 服部晶夫：位相幾何学, 岩波書店, 1991.