対称有理式は対称多項式の商として表される

よしいず

2012-12-23

K を体, $n \geq 1$ を整数とし,

$$K[\boldsymbol{X}] = K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

を K 上の n 変数多項式環,

$$K(\boldsymbol{X}) = K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

を K 上の n 変数有理関数体 (=有理式全体からなる体) とする. $K(\boldsymbol{X})$ は $K[\boldsymbol{X}]$ の商体である. また, S_n を n 次対称群とする.

有理式 $F \in K(\boldsymbol{X})$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対して, 有理式 $F^\sigma \in K(\boldsymbol{X})$ を

$$\begin{aligned} &F^\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &\quad = F(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

により定義する. このとき, 写像

$$K(\boldsymbol{X}) \longrightarrow K(\boldsymbol{X}), \quad F \longmapsto F^\sigma$$

は体 $K(\boldsymbol{X})$ の自己同型になる. また, 任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対して,

$$F^{\tau\sigma} = F^{\tau\sigma}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= F(X_{\tau\sigma(1)},\, X_{\tau\sigma(2)},\, \ldots,\, X_{\tau\sigma(n)}) \\
&= F(X_{\tau(\sigma(1))},\, X_{\tau(\sigma(2))},\, \ldots,\, X_{\tau(\sigma(n))}) \\
&= F^{\sigma}(X_{\tau(1)},\, X_{\tau(2)},\, \ldots,\, X_{\tau(n)}) \\
&= (F^{\sigma})^{\tau}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

有理式 $F \in K(\boldsymbol{X})$ が対称有理式であるとは, 任意の $\sigma \in S_n$ に対して $F^{\sigma} = F$, すなわち

$$
\begin{aligned}
&F(X_{\sigma(1)},\, X_{\sigma(2)},\, \ldots,\, X_{\sigma(n)}) \\
&\qquad = F(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つときにいう. また, 対称有理式のうち多項式であるものを対称多項式という.

［補題 1］ K を体とし, その標数は 2 でないとする. また, $f \in K[\boldsymbol{X}]$ とし, 2 つの数 1, 2 を交換する互換を τ とおく. このとき, $f^{\tau} = -f$ ならば, $K[\boldsymbol{X}]$ において f は $X_1 - X_2$ で割り切れる.

［証明］ いま, $f^{\tau} = -f$, すなわち

$$
\begin{aligned}
&f(X_2,\, X_1,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) \\
&\qquad = -f(X_1,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n)
\end{aligned}
$$

とする. X_1 に X_2 を代入すると,

$$\begin{aligned} &f(X_2, X_2, X_3, \ldots, X_n) \\ &\quad = -f(X_2, X_2, X_3, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

すなわち,

$$2\,f(X_2, X_2, X_3, \ldots, X_n) = 0.$$

K の標数が 2 でなければ,

$$f(X_2, X_2, X_3, \ldots, X_n) = 0$$

が得られる. $f \in \bigl(K[X_2, X_3, \ldots, X_n]\bigr)[X_1]$ と考えたとき, X_2 は f の根であるから, 因数定理により, f は $X_1 - X_2$ で割り切れる. □

［定理 2］ 対称有理式は対称多項式の商として表される.

［証明］ K を体とし, $F \in K(\boldsymbol{X})$ を対称有理式とする. F は有理式なので, ある $f, g \in K[\boldsymbol{X}]$ が存在して, f, g は互いに素 (すなわち, f, g の最大公約元が 1) であり, かつ

$$F = \frac{f}{g}, \quad g \neq 0$$

と表される．また, F が対称有理式であることから, 任意の $\sigma \in S_n$ に対して,

$$\frac{f^\sigma}{g^\sigma} = F^\sigma = F = \frac{f}{g}.$$

f, g は互いに素であるから, ある $h(\sigma) \in K[\boldsymbol{X}]$ が存在して,

$$f^\sigma = h(\sigma)\, f, \quad g^\sigma = h(\sigma)\, g.$$

一方, f^σ は変数の置換によって f から生じた多項式であるから, f と同じ次数である．よって, $h(\sigma)$ は定数, すなわち K の元である．さらに,

$$h(\sigma)^2 f = h(\sigma)\, f^\sigma = (h(\sigma)\, f)^\sigma = (f^\sigma)^\sigma = f.$$

ゆえに,

$$(h(\sigma)^2 - 1)f = 0.$$

したがって, $f = 0$ または $h(\sigma)^2 = 1$.

　よく知られているように, 任意の置換は互換の積で表される．もし仮に f が対称多項式でないとすれば, ある互換 $\tau \in S_n$ が存在して, $f^\tau \neq f$ となる．よって,

$$h(\tau) = -1, \quad f^\tau = -f, \quad g^\tau = -g$$

でなければならない.

ところで, τ が 2 つの数 1, 2 を交換する互換であるとしても一般性を失わない.

K の標数が 2 のとき, $f^\tau = -f = f$ となって $f^\tau \neq f$ と矛盾する.

K の標数が 2 でないとき, 補題 1 より, f, g はともに $X_1 - X_2$ で割り切れなければならない. これは f, g が互いに素であることに反する.

したがって, f は対称多項式でなければならない. またこのとき, g も対称多項式である. $\square$

参考文献

[1] 高木貞治: 代数学講義 改訂新版, 岩波書店, 1965