ローレンツ変換
と
反ローレンツ変換

無名のヒト

前提

・　慣性系Ｓ　　位置：ｘ　　時間：ｔ
　　慣性系Ｓ’　　位置：ｘ’　　時間：ｔ’
　　Ｖ：　ＳとＳ’との相対速度

・定義：
　　ｃ：真空中での光速
　　ｌ＝ｃ・ｔ　　　ｌ’＝ｃ・ｔ’
　　Ｘ＝ｘ＋ｌ　　　Ｔ＝ｘ－ｌ
　　Ｘ’＝ｘ’＋ｌ’　　Ｔ’＝ｘ’－ｌ’

・記号　（Ｚ）^2=Ｚ・Ｚ

・光速一定の原理
（i）　（ｘ’）^2－（l’）^2 = （ｘ）^2－（l）^2 ＝０　（１）式
　　　　Ｘ’・Ｔ’ = Ｘ・Ｔ　　　　　　　　　　(１Ａ)式

（ii）　（ｘ’）^2－（l’）^2 = －｛（ｘ）^2－（l）^2｝＝０　（２）式
　　　　Ｘ’・Ｔ’ = －Ｘ・Ｔ
　(２Ａ)式

ローレンツ変換

（１A）式を満たす１次変換（定係数A－D）

Ｘ’＝Ａ・Ｘ＋Ｂ・Ｔ
Ｔ’＝Ｃ・Ｘ＋Ｄ・Ｔ
Ａ・Ｃ＝０　Ｂ・Ｃ＋Ａ・Ｄ＝１　Ｂ・Ｄ＝０
∴　Ａ＝０またはＣ＝０
　　Ｂ＝０またはＤ＝０

(i) Ｂ＝０　Ｃ＝０の場合

Ａ・Ｄ＝１　より　Ａ＝exp（δ）　Ｄ＝exp（-δ）とおく。

Ｘ’＝ｘ’＋ｌ’＝exp（δ）・Ｘ＝exp（δ）・｛ｘ＋ｌ｝
Ｔ’＝ｘ’－ｌ’＝ exp（-δ）・Ｔ＝exp（-δ）・｛ｘ－ｌ｝

∴ ｘ’＝cosh(δ)・ｘ＋sinh（δ）・ｌ
　ｌ’＝sinh（δ）・ｘ＋cosh（δ）・ｌ

ここでtanh(δ)=β、√（1-β^2）＝1/γ　とおくと
ｘ’＝γ・｛ｘ＋β・ｌ｝
ｌ’＝γ・｛β・ｘ＋ｌ｝

ｘ＝ｖ・ｔ　ｌ＝ｃ・ｔから相対速度を求めると
ｖ’＝（ｖ＋β・ｃ）／（１＋β・ｖ／ｃ）
ｖ＝０のとき　ｖ’＝±Ｖより　β　＝±Ｖ／ｃ　（Ｖ＜ｃ）
　　　　　　　　　　　　　　　　＝１　　　（Ｖ≧ｃ）

(ii)　Ａ＝０　Ｄ＝０の場合

Ｂ・Ｃ＝１　より　Ｂ＝exp（δ）　Ｃ＝exp（-δ）とおく。

Ｘ’＝ｘ’＋ｌ’＝exp（δ）・Ｔ＝exp（δ）・｛ｘ－ｌ｝
Ｔ’＝ｘ’－ｌ’＝ exp（-δ）・Ｘ＝exp（-δ）・｛ｘ＋ｌ｝

∴ ｘ’＝cosh(δ)・ｘ－sinh（δ）・ｌ
　ｌ’＝sinh（δ）・ｘ－cosh（δ）・ｌ

δ＝０のとき、時間反転ｌ’＝－ｌを含む。ｌ’の符号を反転させると
　ｌ’＝－sinh（δ）・ｘ＋cosh（δ）・ｌ

ここでtanh(δ)=β、√（1-β^2）＝1/γ　とおくと
ｘ’＝γ・｛ｘ－β・ｌ｝
ｌ’＝γ・｛－β・ｘ＋ｌ｝

ｘ＝ｖ・ｔ　ｌ＝ｃ・ｔから相対速度を求めると
ｖ’＝（ｖ－β・ｃ）／（１－β・ｖ／ｃ）
ｖ＝０のとき　ｖ’＝ ±Ｖより　β ＝±（逆順）Ｖ／ｃ　（Ｖ＜ｃ）
　　　　　　　　　　　　　　＝１　　　（Ｖ≧ｃ）

反ローレンツ変換

（２Ａ）式を満たす１次変換（定係数Ａ－Ｄ）

Ｘ’＝Ａ・Ｘ＋Ｂ・Ｔ
Ｔ’＝Ｃ・Ｘ＋Ｄ・Ｔ
Ａ・Ｃ＝０　Ｂ・Ｃ＋Ａ・Ｄ＝－１　Ｂ・Ｄ＝０
∴　Ａ＝０またはＣ＝０
　　Ｂ＝０またはＤ＝０

(i)　Ｂ＝０　Ｃ＝０の場合
Ａ・Ｄ＝－１　より　Ａ＝exp（δ）　Ｄ＝exp（-δ）とおく。

Ｘ’＝ｘ’＋ｌ’＝exp（δ）・Ｘ＝exp（δ）・｛ｘ＋ｌ｝
Ｔ’＝ｘ’－ｌ’＝ －exp（-δ）・Ｔ＝－exp（-δ）・｛ｘ－ｌ｝

∴ ｘ’＝sinh(δ)・ｘ＋cosh（δ）・ｌ
　ｌ’ ＝cosh（δ）・ｘ＋sinh（δ）・ｌ
ここでtanh(δ)=β、√（1-β^2）＝1/γ　とおくと
ｘ’＝γ・｛β・ｘ＋ｌ｝
ｌ’ ＝γ・｛ｘ＋β・ｌ｝

ｘ＝ｖ・ｔ　ｌ＝ｃ・ｔから相対速度を求めると
ｖ’＝（β・ｖ＋ｃ）／（β＋ｖ／ｃ）
ｖ＝０のとき　ｖ’＝ ±Ｖより　　β　＝±ｃ／Ｖ　（Ｖ≧ｃ）
　　　　　　　　　　　　　　　　　＝１　　　　（Ｖ＜ｃ）

(ii)　Ａ＝０　Ｄ＝０の場合
Ｂ・Ｃ＝－１　より　Ｂ＝exp（δ）　Ｃ＝exp（-δ）とおく。

Ｘ’＝ｘ’＋ｌ’＝exp（δ）・Ｔ＝exp（δ）・｛ｘ－ｌ｝
Ｔ’＝ｘ’－ｌ’＝ －exp（-δ）・Ｘ＝－exp（-δ）・｛ｘ＋ｌ｝

∴ ｘ’＝sinh(δ)・ｘ－cosh（δ）・ｌ
　ｌ’ ＝cosh（δ）・ｘ－sinh（δ）・ｌ
δ＝０のとき、時空反転ｘ’＝－ｌとｌ’＝ｘを含む。ｘ’の符号を反転させると
　ｘ’ ＝－sinh（δ）・ｘ＋cosh（δ）・ｌ
ここでtanh(δ)=β、√（1-β^2）＝1/γ　とおくと
ｘ’＝γ・｛－β・ｘ＋ｌ｝
ｌ’ ＝γ・｛ｘ－β・ｌ｝

ｘ＝ｖ・ｔ　ｌ＝ｃ・ｔから相対速度を求めると
ｖ’＝（－β・ｖ＋ｃ）／（ｖ／ｃ－β）
ｖ＝０のとき　ｖ’＝ ±Ｖより　　β　＝±（逆順）ｃ／Ｖ　（Ｖ≧ｃ）
　　　　　　　　　　　　　　　　＝１　　　　（Ｖ＜ｃ）

運動量Ｐとエネルギー E

・ローレンツ変換の場合

Ｐ’＝γ・｛Ｐ＋β・Ｅ／ｃ｝
Ｅ’　／ｃ＝γ・｛β・Ｐ＋Ｅ／ｃ｝
Ｐ＝０とＥ＝Ｅ0 より
Ｐ’＝γ・β・Ｅ0／ｃ
Ｅ’=γ・Ｅ0

Ｅ0 = ｍ0・ｃ^2　とおくと
Ｅ’=γ・ｍ0・ｃ^2＝ｍ・ｃ^2
ｍ=γ・ｍ0
Ｐ’=γ・β・Ｅ／ｃ＝γ・（Ｖ／ｃ）・ｍ0・ｃ　＝ｍ・Ｖ
（Ｅ’　／ｃ）^2－（Ｐ’）^2＝（Ｅ0／ｃ）^2　＝（ｍ0・ｃ)^2　≧０
|Ｅ’　／ｃ|≧|Ｐ’|　　∴　ｃ　≧　|Ｖ|（等号はｍ0=０）

・反ローレンツ変換の場合

Ｐ’＝γ・｛β・Ｐ＋Ｅ／ｃ｝
Ｅ’　／ｃ＝γ・｛Ｐ＋β・Ｅ／ｃ｝
Ｐ＝０とＥ＝Ｅ0 より
Ｐ’＝γ・Ｅ0／ｃ
Ｅ’=γ・β・Ｅ0

Ｅ0 = ｍ0・ｃ^2　とおくと
Ｅ’=γ・β・ｍ0・ｃ^2＝ｍ・ｃ^2
ｍ=γ・β・ｍ0
Ｐ’=γ・Ｅ／ｃ＝γ・ｍ0・ｃ＝ｍ・ｃ／β＝ｍ・Ｖ
（Ｅ’　／ｃ）^2－（Ｐ’）^2＝－（Ｅ0／ｃ）^2　＝－（ｍ0・ｃ)^2　≦０
|Ｅ’　／ｃ|≦|Ｐ’|　　∴　ｃ　≦　|Ｖ|（等号はｍ0=０）

補足

・群速度Ｖgと位相速度Ｖp

（Ｅ’／ｃ）^2ー（Ｐ’）^2 ＝ ±(m0・ｃ)^2 より

（２・Ｅ’／ｃ^2）・ｄＥ’ ＝２・Ｐ’・ｄＰ’

|ｄＥ’／ｄＰ’|＝|（Ｐ’／Ｅ’）|・ｃ^2

|Ｖg| =|１／Ｖp|・ｃ^2 ∴|Ｖg|・|Ｖp|=ｃ^2

(i) ｃ ≧ |Ｖg|の場合

（ｃ^2）／|Ｖg| ≧ｃ

Ｖp ≧ｃ

(ii) ｃ ≦ |Ｖg|の場合

（ｃ^2）／|Ｖg| ≦ｃ

Ｖp ≦ｃ

相対性原理＋交換関係→（１）式

・前提

４元位置演算子 ４元運動量演算子

Ｓ系　Ｘμ　Ｐμ

Ｓ’系　Ｘ'μ　Ｐ'μ

（μ＝0,1-3）　Ｘ0 >0

・定義

Ｋ＝Ｘ0＋Ｘ1

Ｌ＝Ｘ0－Ｘ1

Ｍ＝Ｐ0＋Ｐ1

Ｎ＝Ｐ0－Ｐ1

・単位系

ｈ＝２・π

・交換関係（［Ｐ'μ，Ｘ'μ］＝［Ｐμ，Ｘμ］）

［Ｐ'0，Ｘ'0］＝［Ｐ0，Ｘ0］＝i

［Ｐ'1，Ｘ'1］＝［Ｐ1，Ｘ1］＝－i

［Ｍ'，Ｋ'］＝［Ｍ，Ｋ］＝０

［Ｎ'，Ｌ'］＝［Ｎ，Ｌ］＝０

・一次変換式（ＡないしＤは定数）

Ｘ1’＝Ａ・Ｘ1＋Ｂ・Ｘ0

Ｘ0’＝Ｃ・Ｘ0＋Ｄ・Ｘ1

Ｐ1’＝Ａ・Ｐ1＋Ｂ・Ｐ0

Ｐ0’＝Ｃ・Ｐ0＋Ｄ・Ｐ1

・計算

［Ｐ'0，Ｘ'0］＝ｉ・（Ｃ^2－Ｄ^2）　∴ Ｃ^2－Ｄ^2　＝１

［Ｐ'1，Ｘ'1］＝ｉ・（Ｂ^2－Ａ^2））　∴ Ｂ^2－Ａ^2　＝－１

∵［Ｐ0，Ｘ1］＋［Ｐ1，Ｘ0］＝０

ｃｆ）［Ｐ0，Ｘ1］＝－ｉ・Ｐ1・c（光速）／Ｈ

Ｈ＝√((｜Ｐ｜・c)^2＋(m・c^2)^2)

$[M', K'] = -i \cdot ((A+D)^2-(B+C)^2)) = 0$

$[N', L'] = -i \cdot ((A-D)^2-(B-C)^2)) = 0$

$\therefore \quad A \cdot D = B \cdot C$

$C^2-D^2 = 1 \qquad C^2-B^2 = 1$

$B^2-A^2 = -1 \quad \Rightarrow D^2-A^2 = -1$

$A \cdot D = B \cdot C \quad C \cdot D = A \cdot B$

ｃｆ）

$B^2 \cdot (1-C^2/D^2) = -1 \quad \therefore B^2 = D^2$

$C^2 \cdot (1-B^2/A^2) = 1 \quad \therefore C^2 = A^2$

$A = C = \cosh\theta$

$B = D = \sinh\theta$

$K'L' = (X'0)^2-(X'1)^2$

$= (C \cdot X0 + D \cdot X1)^2 - (A \cdot X1 + B \cdot X0)^2$

$= (C^2-B^2)X0^2$

$+ 2 \cdot (C \cdot D - A \cdot B) X0X1$

$+ (D^2-A^2)X1^2$

$= X0^2 - X1^2 = KL$ ・・・（１）式

・結論

$(X'0)^2-(X'1)^2 \neq -(X0^2-X1^2)$

シュレーディンガー方程式

・Ｓ系

$-i\partial_1\Psi = P_1\Psi$

$i\partial_0\Psi = P_0\Psi$

・記号

$\tanh\theta = \beta = V/c$

Ψ：波動関数

$\partial_1 = \partial/\partial x_1$

$\partial_0 = \partial/\partial x_0$

$P_0 = H/c$

P_1：（ｘ1方向）運動量

・ローレンツ変換式

$x'_1 = \cosh\theta \cdot x_1 - \sinh\theta \cdot x_0$

$x'_0 = \cosh\theta \cdot x_0 - \sinh\theta \cdot x_1$

$P_1 = \cosh\theta \cdot P'_1 + \sinh\theta \cdot P'_0$

$P_0 = \cosh\theta \cdot P'_0 + \sinh\theta \cdot P'_1$

$\partial_1 = \cosh\theta \cdot \partial'_1 - \sinh\theta \cdot \partial'_0$

$\partial_0 = \cosh\theta \cdot \partial'_0 - \sinh\theta \cdot \partial'_1$

・Ｓ'系

$-i(\cosh\theta \cdot \partial'_1 - \sinh\theta \cdot \partial'_0)\Psi = (\cosh\theta \cdot P'_1 + \sinh\theta \cdot P'_0)\Psi$ －（Ａ）

$i(\cosh\theta \cdot \partial'_0 - \sinh\theta \cdot \partial'_1)\Psi = (\cosh\theta \cdot P'_0 + \sinh\theta \cdot P'_1)\Psi$ －（Ｂ）

（Ａ）×coshθ－（Ｂ）×sinhθより、　$-i\partial'_1\Psi = P'_1\Psi$

（Ａ）×sinhθ－（Ｂ）×coshθより、　$i\partial'_0\Psi = P'_0\Psi$

ハイゼンベルク方程式

・Ｓ系
ｉｄ0 Ｘ1＝　［Ｘ1，Ｐ0］
ｉｄ1 Ｘ0＝－［Ｘ0，Ｐ1］

　∂Ｘ1／∂ｘ0=0
　∂Ｘ0／∂ｘ1=0

・記号
tanhθ＝－β＝－Ｖ／ｃ
ｄ1＝ｄ／ｄｘ1
ｄ0＝ｄ／ｄｘ0
Ｐ0＝Ｈ／ｃ
Ｐ1：（ｘ1方向）運動量
［Ａ，Ｂ］＝ＡＢ－ＢＡ
［Ｘ0，Ｐ0］＋［Ｘ1，Ｐ1］＝０

・ローレンツ変換式
Ｘ'1＝coshθ・Ｘ1＋sinhθ・Ｘ0
Ｘ'0＝coshθ・Ｘ0＋sinhθ・Ｘ1
Ｐ'1＝coshθ・Ｐ1＋sinhθ・Ｐ0
Ｐ'0＝coshθ・Ｐ0＋sinhθ・Ｐ1
ｄ'1＝coshθ・ｄ1－sinhθ・ｄ0
ｄ'0＝coshθ・ｄ0－sinhθ・ｄ1

・Ｓ'系
　ｉｄ'0 Ｘ'1
　＝ｉ（coshθ・ｄ0－sinhθ・ｄ1）（coshθ・Ｘ1＋sinhθ・Ｘ0）
　＝ｉ（（coshθ）^2・ｄ0 Ｘ1　－（sinhθ）^2・ｄ1 Ｘ0）
　＝（coshθ）^2・［Ｘ1，Ｐ0］＋（sinhθ）^2・［Ｘ0，Ｐ1］
　＝［coshθ・Ｘ1＋sinhθ・Ｘ0，coshθ・Ｐ0＋sinhθ・Ｐ1］
　＝［Ｘ'1，Ｐ'0］

　ｉｄ'1 Ｘ'0
　＝ｉ（coshθ・ｄ1－sinhθ・ｄ0）（coshθ・Ｘ0＋sinhθ・Ｘ1）
　＝ｉ（（coshθ）^2・ｄ1 Ｘ0　－（sinhθ）^2・ｄ0 Ｘ1）
　＝－（（coshθ）^2・［Ｘ0，Ｐ1］＋（sinhθ）^2・［Ｘ1，Ｐ0］）
　＝－［coshθ・Ｘ0＋sinhθ・Ｘ1，coshθ・Ｐ1＋sinhθ・Ｐ0］
　＝－［Ｘ'0，Ｐ'1］

ローレンツ変換行列

相対速度Ｖｊ（ｊ＝1-3）
βｊ＝Ｖｊ／ｃ
｜β｜^2＝Ｖｊ・Ｖｊ／ｃ^2
γ＝１／√（１－｜β｜^2）

ｘ’ｊ=γ・（ｘｊ－（Ｖｊ／ｃ）・ｘ0）
ｘ’0=γ・（ｘ0　－Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）

Ｖ1／ｘ1＝Ｖ2／ｘ2＝Ｖ3／ｘ3
Ｖｊ・ｘｊ＝｜Ｖｊ｜・｜ｘｊ｜
｜Ｖｊ｜=√（Ｖ1＾2＋Ｖ2＾2＋Ｖ3＾2）
｜ｘｊ｜=√（ｘ1＾2＋ｘ2＾2＋ｘ3＾2）

ｘ’ｊ・ｘ’ｊ
=γ^2・（ｘｊ・ｘｊ－２・（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）・ｘ0＋（Ｖｊ／ｃ）^2・(ｘ0)^2）

ｘ’0・ｘ’0
=γ^2・（ｘ0・ｘ0　－２・（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）・ｘ0　－（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）^2）

（Ｖｊ・ｘｊ／ｃ）^2=（|Ｖｊ｜^2・｜ｘｊ｜^2）／ｃ^2

変換行列Ｌ（γ,β）＝Ｌ（β）＝Ｌ（β1,β2,β3）

Ｌ（β）
=γ×
（１　－β1　－β2　－β3
－β1　１　０　０
－β2　０　１　０
－β3　０　０　１）

ミンコフスキー計量テンソル[η]μν
η00＝１
η0j＝ηj0＝０

$\eta_{ij} = -\delta_{ij}$　　　$i,j = 1\text{-}3$

転置記号：　$\overline{}\,t$

$(\eta L(\beta))^{t}$

$$
= \gamma \times
\begin{pmatrix}
1 & +\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 \\
-\beta_1 & -1 & 0 & 0 \\
-\beta_2 & 0 & -1 & 0 \\
-\beta_3 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

$(\eta L(\beta))^{t}\ L(\beta)$

$$
= \gamma^2 \times
\begin{pmatrix}
1-\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_1^2-1 & \beta_1 \cdot \beta_2 & \beta_1 \cdot \beta_3 \\
0 & \beta_1 \cdot \beta_2 & \beta_2^2-1 & \beta_2 \cdot \beta_3 \\
0 & \beta_1 \cdot \beta_3 & \beta_2 \cdot \beta_3 & \beta_3^2-1
\end{pmatrix}
$$

$X = X_\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$

$X' = L(\beta)\ X$

$(X')^\dagger = (\eta L(\beta)\ X)^{t}$

Let’s　計算！

$(X')^\dagger X'$

$= X^{t}\ (\eta L(\beta)\ X)^{t}\ L(\beta)\ X$

$= X^{t}\ L(\beta)\ \eta\ \ L(\beta)\ X$

$= X^\dagger X$

$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot X_1 \cdot X_2 = (\beta_1 \cdot X_2)^2 = (\beta_2 \cdot X_1)^2$

$\beta_2 \cdot \beta_3 \cdot X_2 \cdot X_3 = (\beta_2 \cdot X_3)^2 = (\beta_3 \cdot X_2)^2$

$\beta_3 \cdot \beta_1 \cdot X_3 \cdot X_1 = (\beta_3 \cdot X_1)^2 = (\beta_1 \cdot X_3)^2$

以上

任意方向（β）のローレンツ変換

β＝（β1，β2，β3）

βj＝Vj／ｃ

内積

A・B＝Aj・Bj

単位方向ベクトル ｎj

ｎ1＝β／|β|

ｎ1・ｎ2＝０＝ｎ1・ｎ3

Ｓ系　ｘ＝（ｘ1，ｘ2，ｘ3）　ｘ0

Ｓ'系　ｘ'＝（ｘ'1，ｘ'2，ｘ'3）　ｘ'0

ｘ'0＝coshθ（ｘ0－β・ｘ）

ｘ' ＝coshθ（ｘ －βｘ0）

coshθ＝１／√￣（１－|β|^2）

ｘ'＝（ｘ'・ｎ1）ｎ1＋ｘ2ｎ2＋ｘ3ｎ3

ｘ'・ｎ1＝coshθ（ｘ・ｎ1－（β・ｎ1）ｘ0）＝coshθ（ｘ1－|β|ｘ0）

ｘ2ｎ2＋ｘ3ｎ3＝ｘ－ｘ1ｎ1

ｘ' ＝coshθ（ｘ1ｎ1 －|β|ｘ0ｎ1）＋ｘ－ｘ1ｎ1

＝（coshθ－１）ｘ1ｎ1＋ｘ－（ｘ0coshθ）β

＝（coshθ－１）（ｘ・β）β／|β|^2＋ｘ－（ｘ0coshθ）β

∴

ｘ'j＝ｘj＋（coshθ－１）（ｘ1β1＋ｘ2β2＋ｘ3β3）βj／|β|^2－（ｘ0coshθ）βj

ｘ'0＝ｘ0coshθ－（β1・ｘ1＋β2・ｘ2＋β3・ｘ3）coshθ

００成分　：　coshθ

０ｊ,ｊ０成分：　－βjcoshθ

ｊｋ成分：　δjk＋（coshθ－１）βjβk／|β|^2　　j,k=1-3

行列表示

０行　coshθ　　　－β1coshθ　　－β2coshθ　　－β3coshθ

１行　－β1coshθ　１＋（coshθ－１）（β1／|β|）^2　（coshθ－１）β1β2／|β|^2　（coshθ－１）β1β3／|β|^2

２行　－β2coshθ　（coshθ－１）β2β1／|β|^2　１＋（coshθ－１）（β2／|β|）^2　（coshθ－１）β2β3／|β|^2

３行　－β3coshθ　（coshθ－１）β3β1／|β|^2　（coshθ－１）β3β2／|β|^2　　１＋（coshθ－１）（β3／|β|）^2

ｃｆ）任意方向（β）の速度変換式

β＝（β1, β2, β3）　：相対速度Ｖ／ｃ

Ｓ系での速度ベクトル

ｖ＝（ｖ1, ｖ2, ｖ3）

Ｓ'系での速度ベクトル

ｖ'＝（ｖ'1, ｖ'2, ｖ'3）

　＝（√￣（１－｜β｜^2））ｖ+(１－√￣（１－｜β｜^2））（ｖ・β）β/｜β｜^2　－ｃβ

　　／　（１－（β・ｖ/ｃ）

ｃ＝１（自然単位系）、Ｂ＝β・ｖ＝ｖ・βとして

｜ｖ'｜^2

　＝（１－｜β｜^2））｜ｖ｜^2

　　+(１－２・√￣（１－｜β｜^2）＋（１－｜β｜^2））Ｂ^2/｜β｜^2

　　＋｜β｜^2

　　＋２・（√￣（１－｜β｜^2））－（１－｜β｜^2））Ｂ^2/｜β｜^2

　　－２・(１－√￣（１－｜β｜^2））Ｂ

　　－２・（√￣（１－｜β｜^2））Ｂ

　／　（１－２Ｂ＋Ｂ^2）

｜ｖ'｜^2　－１

＝　（１－｜β｜^2））｜ｖ｜^2
　＋　(１－（１－｜β｜^2））B^2/｜β｜^2　－B^2　　　・・・（１）
　＋｜β｜^2　－１
　－２・(１－√（１－｜β｜^2））B　－２・（√（１－｜β｜^2））B　＋２B　・・・（２）
　／　（１－B）^2

分子（１）と（２）はきれいに相殺して

｜ｖ’｜^2　－１　＝（１－｜β｜^2））(｜ｖ｜^2－１）／（１－β・ｖ）^2

１≧｜β｜^2で、分母が正であるから、
位相速度：　　｜ｖ｜^2　≧１　ならば　｜ｖ’｜^2　≧１
群速度　：　　｜ｖ｜^2　≦１　ならば　｜ｖ’｜^2　≦１

ローレンツ転換

記号
　ミンコフスキー計量テンソルη＝（ξ）^2
　ηab
＝１　（a=b=0
－１　（a=b=1,2,3）
　０　（a≠b）

　ξab
＝１　（a=b=0
　ｉ　（a=b=1,2,3）
　０　（a≠b）

転換前
　基本関係式
(Ｘ'0)^2＋(Ｘ'1)^2＋(Ｘ'2)^2＋(Ｘ'3)^2＝(Ｘ0)^2＋(Ｘ1)^2＋(Ｘ2)^2＋(Ｘ3)^2

　Ｘ1方向
　　Ｘ'0＝Ｘ0・ｃｏｓθ－Ｘ1・ｓｉｎθ
　　Ｘ'1＝Ｘ0・ｓｉｎθ＋Ｘ1・ｃｏｓθ
　　Ｘ'2＝Ｘ2
　　Ｘ'3＝Ｘ3
　　　　　　ｔａｎθ＝Ｖ／ｃ

　Ｓ^2＝(Ｘ'0)^2＋(Ｘ'1)^2＝(Ｘ0)^2＋(Ｘ1)^2＝０　のとき、
　Ｘ0＝Ｘ1＝０

転換式
　Ｘμ→ξ・Ｘμ　（Ｘ0→Ｘ0，Ｘ1→ｉ・Ｘ1，Ｘ2→ｉ・Ｘ2，Ｘ3→ｉ・Ｘ3）
　Ｘ'μ→ξ・Ｘ'μ　（Ｘ'0→Ｘ'0，Ｘ'1→ｉ・Ｘ'1，Ｘ'2→ｉ・Ｘ'2，Ｘ'3→ｉ・Ｘ'3）
　θ　→ｉ・θ

　　ｃｏｓ（ｉ・θ）＝（exp（－θ）＋exp（θ））／２＝ｃｏｓｈθ

　　ｓｉｎ（ｉ・θ）＝（exp（－θ）－exp（θ））／（２・ｉ）＝ｉ・ｓｉｎｈθ

または　β　→ｉ・β

　　ｃｏｓ（ｉ・θ）＝１／√（１＋（ｉ・β）^2）＝１／√（１－β^2）

　　ｓｉｎ（ｉ・θ）＝（ｉ・β）／√（１＋（ｉ・β）^2）＝（ｉ・β）／√（１－β^2）

転換後

　Ｘ1方向ブースト

　　　Ｘ'0＝Ｘ0・ｃｏｓｈθ－ｉ・Ｘ1（ｉ・ｓｉｎｈθ）

　　　　＝Ｘ0・ｃｏｓｈθ＋Ｘ1・ｓｉｎｈθ）

　　　ｉ・Ｘ'1＝ｉ・Ｘ1・ｃｏｓｈθ＋Ｘ0・（ｉ・ｓｉｎｈθ）

　　　Ｘ'1＝Ｘ1・ｃｏｓｈθ＋Ｘ0・ｓｉｎｈθ

　　　ｉ・Ｘ'2＝ｉ・Ｘ2

　　　ｉ・Ｘ'3＝ｉ・Ｘ3

　　　　　　　ｔａｎｈθ＝－Ｖ／ｃ

　Ｓ^2＝(Ｘ'0)^2－(Ｘ'1)^2＝(Ｘ0)^2－(Ｘ1)^2＝０　のとき、

　±Ｘ0＝Ｘ1

Ｅｘ）交換関係

　転換前　［Ｐ1，Ｘ1］＝［Ｐ0，Ｘ0］= ｉ

　［Ｐ1，Ｘ1］＝［Ｐ'1・ｃｏｓθ＋Ｐ'0・ｓｉｎθ，Ｘ'1・ｃｏｓθ＋Ｘ'0・ｓｉｎθ］

　　　　　＝［Ｐ'1，Ｘ'1］・（ｃｏｓθ）^2 ＋［Ｐ'0，Ｘ'0］・（ｓｉｎθ）^2

　　　　　　　　　　ｃｆ）　［Ｐ'1，Ｘ'0］+［Ｐ'0，Ｘ'1］＝０

　［Ｐ0，Ｘ0］＝［Ｐ'0・ｃｏｓθ＋Ｐ'1・ｓｉｎθ，Ｘ'0・ｃｏｓθ＋Ｘ'1・ｓｉｎθ］

　　　　　＝［Ｐ'0，Ｘ'0］・（ｃｏｓθ）^2 ＋［Ｐ'1，Ｘ'1］・（ｓｉｎθ）^2

転換式

　　Ｘ'μ→ξ・Ｘ'μ　（Ｘ'0→Ｘ'0，Ｘ'1→ｉ・Ｘ'1，Ｘ'2→ｉ・Ｘ'2，Ｘ'3→ｉ・Ｘ'3）

　　Ｐ'μ→ξ・Ｐ'μ　（Ｐ'0→Ｐ'0，Ｐ'1→ｉ・Ｐ'1，Ｐ'2→ｉ・Ｐ'2，Ｐ'3→ｉ・Ｐ'3）

　　θ　→ｉ・θ　または　β　→ｉ・β

転換後

$$
\begin{aligned}
&[i \cdot P_1,\ i \cdot X_1] \\
&= [i \cdot P'_1,\ i \cdot X'_1] \cdot (\cosh\theta)^2 + [P'_0,\ X'_0] \cdot (i \cdot \sinh\theta)^2 \\
&= -[P'_1,\ X'_1] \cdot (\cosh\theta)^2 - [P'_0,\ X'_0] \cdot (\sinh\theta)^2 \\
&= i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[P_0,\ X_0] \\
&= [P'_0,\ X'_0] \cdot (\cosh\theta)^2 + [i \cdot P'_1,\ i \cdot X'_1] \cdot (i \cdot \sinh\theta)^2 \\
&= [P'_0,\ X'_0] \cdot (\cosh\theta)^2 + [P'_1,\ X'_1] \cdot (\sinh\theta)^2 \\
&= i
\end{aligned}
$$

$[P'_1,\ X'_1] = A$　$[P'_0,\ X'_0] = B$とおくと、

$$(\cosh\theta)^2 \cdot A + (\sinh\theta)^2 \cdot B = -i$$
$$(\sinh\theta)^2 \cdot A + (\cosh\theta)^2 \cdot B = i$$

$$
T(\theta) = \begin{pmatrix} (\cosh\theta)^2 & (\sinh\theta)^2 \\ (\sinh\theta)^2 & (\cosh\theta)^2 \end{pmatrix}
$$

$$\det T(\theta) = (\cosh\theta)^4 - (\sinh\theta)^4 = (\cosh\theta)^2 + (\sinh\theta)^2$$

逆行列$T_{inv}(\theta)$

$$
= (1/\det T(\theta)) \times \begin{pmatrix} (\cosh\theta)^2 & -(\sinh\theta)^2 \\ -(\sinh\theta)^2 & (\cosh\theta)^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T_{inv}(\theta) \times \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix}
$$

$\therefore$　$A = -i$　$B = i$

交換関係のローレンツ変換

定義

Λ￣μν＝［P￣μ，X￣ν］

テンソルの変換則

Λ'￣μν＝（∂X'￣μ／∂X￣ρ）・（∂X'￣ν／∂X￣ξ）・Λ￣ρξ

計算

　X1方向のローレンツブースト

　βj＝vj／c

　V＝v1

　γ＝1／√￣（1－（β1）^2）

　coshθ＝γ

　sinhθ＝γ・β1

００成分

　Λ'￣00＝（coshθ）^2・Λ￣00－coshθ・sinhθ・（Λ￣01＋Λ￣10）＋（sinhθ）^2・Λ￣11＝Λ￣00

０１,１０成分

　Λ'￣01＝（coshθ）^2・Λ￣01－coshθ・sinhθ・（Λ￣00＋Λ￣11）＋（sinhθ）^2・Λ￣10＝Λ￣01＝－Λ￣10

０２,２０成分

　Λ'￣02＝coshθ・Λ￣02－sinhθ・Λ￣12＝coshθ・Λ￣02＝－Λ￣20

０３,３０成分

　Λ'￣03＝coshθ・Λ￣03－sinhθ・Λ￣13＝coshθ・Λ￣03＝－Λ￣30

１１成分

　Λ'￣11＝（coshθ）^2・Λ￣11－coshθ・sinhθ・（Λ￣01＋Λ￣10）＋（sinhθ）^2・Λ￣00＝Λ￣11

１２,２１成分

　Λ'￣12＝ coshθ・Λ￣12－sinhθ・Λ￣02＝－sinhθ・Λ￣02＝－Λ￣21

１３,３１成分

$\Lambda'^{13} = \cosh\theta \cdot \Lambda^{13} - \sinh\theta \cdot \Lambda^{03} = -\sinh\theta \cdot \Lambda^{03} = -\Lambda^{31}$

２２成分

$\Lambda'^{22} = \Lambda^{22}$

２３，３２成分

$\Lambda'^{23} = \Lambda^{23}$

３３成分

$\Lambda'^{33} = \Lambda^{33}$

まとめ

$\Lambda^{jj} = -i \qquad \Lambda^{00} = i$

$\Lambda^{0j} = -i \cdot \beta j = -\Lambda^{j0}$

$\Lambda^{jk} = 0 \qquad (j \neq k)$

$$\begin{pmatrix} i & -i \cdot \beta 1 & -i \cdot \gamma \cdot \beta 2 & -i \cdot \gamma \cdot \beta 3 \\ i \cdot \beta 1 & -i & i \cdot \gamma \cdot \beta 1 \cdot \beta 2 & i \cdot \gamma \cdot \beta 1 \cdot \beta 3 \\ i \cdot \gamma \cdot \beta 2 & -i \cdot \gamma \cdot \beta 1 \cdot \beta 2 & -i & 0 \\ i \cdot \gamma \cdot \beta 3 & -i \cdot \gamma \cdot \beta 1 \cdot \beta 3 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad \Lambda'^{\mu\nu} = i \cdot (\eta^{\mu\nu} - \gamma \cdot L^{\mu\nu})$

$L^{\mu\nu} = -L^{\nu\mu} = 0$

$L^{01} = \beta 1 / \gamma$

$L^{02} = \beta 2$

$L^{03} = \beta 3$

$L^{12} = -\beta 1 \cdot \beta 2$

$L^{13} = -\beta 1 \cdot \beta 3$

$\Lambda^{01} + \Lambda^{10} = 0 \quad \rightarrow \quad P^{0} \fallingdotseq P^{1}$ のとき、$L^{01} = -L^{10} = 1$

クライン－ゴルドン方程式

基本関係式　$P0\hat{}2 = Pj\hat{}2 + (m\cdot c)\hat{}2$　　j=1～３

基本方程式　$i\partial_\mu\psi = P_\mu\psi$　　$\mu=0,1\sim3$

$i\partial 0\,\psi = P0\psi$　から

$-(\partial 0)\hat{}2\psi = P0\hat{}2\psi = (Pj\hat{}2 + (m\cdot c)\hat{}2)\psi$

$Pj\psi = -i\partial j\,\psi$　を代入

$-(\partial 0)\hat{}2\psi = -(\partial j)\hat{}2\psi + (m\cdot c)\hat{}2\psi$

∴　$(\Box + (m\cdot c)\hat{}2)\psi = 0$

$\Box \equiv (\partial 0)\hat{}2 - (\partial j)\hat{}2 = \partial_\mu\partial^\mu$

ｃｆ１)分散関係

$\psi \propto \exp(ik_\mu\cdot x^\mu)$

$k_0 = \omega / c$　　ω：角周波数

$k_1 = 2\pi/\lambda_1 = k$　　λ_1：波長

$k_2 = 0$

$K_3 = 0$　とする

$(-k0\hat{}2 + k\hat{}2 + (m\cdot c)\hat{}2)\psi = 0$

$\therefore k_0\hat{}2 = k\hat{}2 + (m\cdot c)\hat{}2$　　：$\omega = \pm c\sqrt{}(k\hat{}2 + (m\cdot c)\hat{}2)$

$2\cdot k_0\cdot dk_0 = 2\cdot k\cdot dk$

$\therefore dk0/dk = (d\omega/dk)/c = k/k0 = c\cdot k/\omega$

位相速度　$Vp = \omega/k$

$|Vp| = c\sqrt{}(1 + (m\cdot c/k)\hat{}2)$　$>c$

群速度　$Vg = d\omega/dk = c\hat{}2\cdot k/\omega$

$|Vg| = c\hat{}2/(c\sqrt{}(1 + (m\cdot c/k)\hat{}2))$

$= c/\sqrt{}(1 + (m\cdot c/k)\hat{}2)$　$<c$

$= c\cdot k/\sqrt{}(k\hat{}2 + (m\cdot c)\hat{}2)$

ｃｆ２)低エネルギー近似

Ｐ0－ｍ・ｃ

＝　√（Pｊ^2＋（ｍ・ｃ）^2）－ｍ・ｃ

＝(√（Ｐｊ^2＋（ｍ・ｃ）^2）－ｍ・ｃ）・(√（Ｐｊ^2＋（ｍ・ｃ）^2）＋ｍ・ｃ）／(√（Ｐｊ^2＋（ｍ・ｃ）^2）＋ｍ・ｃ）

＝　Ｐｊ^2／(√（Ｐｊ^2＋（ｍ・ｃ）^2）＋ｍ・ｃ）

Ｐｊ≪ｍ・ｃ　より

≒　Ｐｊ^2／（２ｍ・ｃ）

Ｐ0＝ｍ・ｃ＋Ｐｊ^2／（２ｍ・ｃ）と　、方程式ｉ∂0 ψ＝P0ψ、－ｉ∂ｊ ψ＝Pjψから

ｉ∂0 ψ＝（ｍ・ｃ＋(１／（２ｍ・ｃ））・（－ｉ∂ｊ）^2）ψ

∂0＝(１／ｃ）・∂ｔ＝∂／∂（ｃｔ）　より

∴ｉ∂ｔψ＝（ｍ・ｃ^2－(１／(２ｍ))・（∂ｊ）^2）ψ　：非相対論的シュレーディンガー方程式

H（ハイゼンベルク）ーD（ディラック）方程式

μ＝０、１－３
ｊ＝１－３

P^{μ}：４元運動量ベクタ
X^{μ}：４元位置ベクタ
F^{μ}：４元力ベクタ
Ａ（τ，P^{μ}，X^{μ}）：演算子
τ：固有時＝ｔ／γ
γ：＝１／√（１－β^2）　：β＝Ｖ／ｃ

ｄＡ／ｄτ
＝∂Ａ／∂τ＋（ｄX^{j}／ｄτ）∂Ａ／∂X^{j}
　　　＋（ｄP^{μ}／ｄτ）∂Ａ／∂P^{μ}

ｄX^{j}／ｄτ＝P^{j}／ｍ
ｄP^{μ}／ｄτ＝F^{μ}

－ｉ∂Ａ／∂X^{j}＝［Ａ，P_{j}］
ｉ∂Ａ／∂P^{μ}＝［Ａ，X_{μ}］

∴ｉｄＡ／ｄτ
＝－（P^{μ}／ｍ）・［Ａ，P_{μ}］＋　F^{μ}［Ａ，X_{μ}］
＝ｉ∂Ａ／∂τ－（P^{j}／ｍ）・［Ａ，P_{j}］
　　　＋　F^{μ}［Ａ，X_{μ}］

Ex1）Ａ（ｔ）の場合
ｉｄＡ／ｄτ
＝－［Ａ，$P^{j}P_{j}$／（２ｍ）］
＝［Ａ，(P^{0})^2／（２ｍ）］　∵　$P^{\mu}P_{\mu}$＝（ｍ・ｃ）^2　：定数

ｉ・γ・ｄＡ／ｄｔ
＝（［Ａ，P^{0}］P^{0}＋P^{0}［Ａ，P^{0}］）／（２ｍ）
γ≒１のとき
ｉｄＡ／ｄｔ＝［Ａ，ｃ・P^{0}］　　：ｃ・P^{0}＝Ｈ

Ex2）Ａ（X^{μ}）の場合
ｉｄＡ／ｄτ
＝－（P^{j}／ｍ）・［Ａ，P_{j}］
＝（（P^{j}）^2／ｍ）Ａ

((P^{0})^2）Ａ＝（（P^{j}）^2）Ａ

Ex3) A（P^{μ}）の場合

$i\,dA/d\tau$

$=F^{\mu}[A, X_{\mu}]$

$=-(F^{\mu}X_{\mu})A$

Ex4) A＝H（ハミルトニアン）の場合

$i\,dH/d\tau$

$= i\,\partial H/\partial\tau-(P^{j}/m)\cdot[H, P_{j}]$

$+\ F^{\mu}[H, X_{\mu}]$

$[H, P_{j}]=-i\,\partial H/\partial X^{j}=i\,dP^{j}/d\tau/\gamma=i\,F^{j}/\gamma$

$[H, X_{\mu}]=i\,\partial H/\partial P^{\mu}=i\,dX^{\mu}/d\tau/\gamma$

$i\,\partial H/\partial\tau=[P_{0}, H]=0$ （∵孤立系） より

$dH/d\tau=0$

$i\,dP^{0}/d\tau$

$=i\,\partial P^{0}/\partial\tau+\ F^{\mu}[P^{0}, X_{\mu}]$

$F^{\mu}[P^{0}, X_{\mu}]=i\,F^{\mu}(dX_{\mu}/dt)=0$

$i\,\partial P^{0}/\partial\tau=[P_{0}, P^{0}]=0$ より

$dP^{0}/d\tau=0$

ローレンツジェネレータ

４元角運動量への拡張

記号

$\mu,\nu,\rho,\lambda=0,1\text{-}3$

X_μ：４元位置座標

P_ν：４元運動量

$[A, B]=AB-BA$　：交換子

$[P_\mu, X_\nu]=iH_{\mu\nu}$　：計量テンソル　プランク定数$h=2\pi$

ローレンツジェネレータ

$L_{\mu\nu}=X_{[\mu}P_{\nu]}=X_\mu P_\nu-X_\nu P_\mu$　：[ ]　反対称化の置換記号

$=-X_{[\nu}P_{\mu]}=-L_{\nu\mu}$

交換関係$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\lambda}]$

$=[X_{[\mu}P_{\nu]}, X_{[\rho}P_{\lambda]}]$

$=X_{[\mu}P_{\nu]}X_{[\rho}P_{\lambda]}-X_{[\rho}P_{\lambda]}X_{[\mu}P_{\nu]}$

ここで、

$X_{[\mu}P_{\nu]}X_{[\rho}P_{\lambda]}$

$=X_{[\mu}(P_{\nu]}X_{[\rho)}P_{\lambda]}+X_{[\mu}|X_{[\rho|}P_{\nu]}P_{\lambda]}$

$=X_{[\mu}(X_{[\rho|}P_{\nu]}+iH_{\nu][\rho)}P_{\lambda]}+X_{[\rho}X_{[\mu}P_{\nu]}P_{\lambda]}$　：$P_\nu X_\rho=X_\rho P_\nu+iH_{\nu\rho}$

$=2\cdot X_{[\rho}X_{[\mu}P_{\nu]}P_{\lambda]}+iX_{[\mu}H_{\nu][\rho}P_{\lambda]}$

$X_{[\rho}P_{\lambda]}X_{[\mu}P_{\nu]}$　：μとρ、νとλの入れ替え

$=2\cdot X_{[\mu}X_{[\rho}P_{\lambda]}P_{\nu]}+iX_{[\rho}H_{\lambda][\mu}P_{\nu]}$

$=2\cdot X_{[\rho}X_{[\mu}P_{\nu]}P_{\lambda]}+iX_{[\rho}H_{\lambda][\mu}P_{\nu]}$

$\therefore\quad X_{[\mu}P_{\nu]}X_{[\rho}P_{\lambda]}-X_{[\rho}P_{\lambda]}X_{[\mu}P_{\nu]}$

$=i(X_{[\mu}H_{\nu][\rho}P_{\lambda]}-X_{[\rho}H_{\lambda][\mu}P_{\nu]})$

$M_{\mu\nu\rho\lambda} = X_\mu H_{\nu\rho} P_\lambda = X_\mu H_{\rho\nu} P_\lambda = M_{\mu\rho\nu\lambda}$
とおく

$X_{[\mu} H_{\nu][\rho} P_{\lambda]} - X_{[\rho} H_{\lambda][\mu} P_{\nu]}$
$= M_{[\mu\nu][\rho\lambda]} - M_{[\rho\lambda][\mu\nu]}$
$= M_{[\mu\nu][\rho\lambda]} - M_{[\lambda\rho][\nu\mu]}$

ここで、[ ]は忘れて
$M_{\mu\nu\rho\lambda} - M_{\lambda\rho\nu\mu}$
$= X_\mu H_{\nu\rho} P_\lambda - X_\lambda H_{\rho\nu} P_\mu$
$= H_{\nu\rho} (X_\mu P_\lambda - X_\lambda P_\mu)$ 　　　: $H_{\nu\rho} = H_{\rho\nu}$
$= H_{\nu\rho} X_{[\mu} P_{\lambda]}$
$= H_{\rho\nu} L_{\mu\lambda}$

$\therefore M_{[\mu\nu][\rho\lambda]} - M_{[\lambda\rho][\nu\mu]}$
$= H_{[\rho[\nu} L_{\mu]\lambda]}$

$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\lambda}] = i H_{[\rho[\nu} L_{\mu]\lambda]}$
$= - i H_{[\rho[\mu} L_{\nu]\lambda]}$
$= i H_{[\mu[\rho} L_{\lambda]\nu]}$

右辺$= i (H_{\mu[\rho} L_{\lambda]\nu} - H_{\nu[\rho} L_{\lambda]\mu})$
$= i (H_{\mu\rho} L_{\lambda\nu} - H_{\mu\lambda} L_{\rho\nu} - H_{\nu\rho} L_{\lambda\mu} + H_{\nu\lambda} L_{\rho\mu})$
$= i (H_{\mu\rho} L_{\lambda\nu} + H_{\mu\lambda} L_{\nu\rho} + H_{\nu\rho} L_{\mu\lambda} + H_{\nu\lambda} L_{\rho\mu})$