

Nanasi Elementary Geometric Society

author(s)	高次厨
title	高次元超球体を見込む超立体角について
subtitle	
publisher	名無初等幾何学会
date	2011-08-12
uri	http://p.booklog.jp/book/32279
format	application/epub+zip
rights	http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
type	Preprint
language	ja_JP
references	http://myopenarchive.org/docs/NEGS/116

<http://www.freeml.com/egs>

1 INTRODUCTION

3次元空間内で、ある視点から物体がどのくらいの大きさに見えるかという値として、立体角という値がある。立体角は、物理学や工学の分野では実用的な近似値などを用いて広く利用されている(文献[1])。一方、数学関係では積分解析や数値計算の分野となり、まとめられている例をあまり見ない。そこで、本稿では近年高次元空間での進歩が著しい物理学に習い、この立体角を高次元空間に拡張した n 次元超立体角 Ω^n について数学的にまとめる。

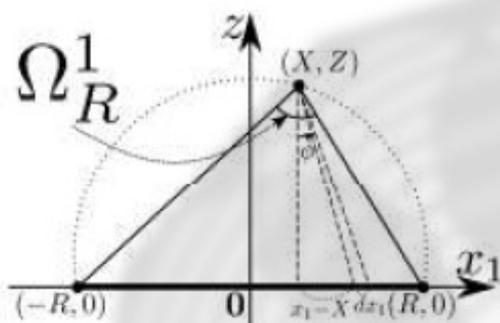


Fig 1: Angle of view of a line-segment.

例えば、Fig 1のように、半径 R の1次元超球体(線分)の見込み角 Ω_R^1 について考える。まず、 $\Omega_R^1 = \int_{-R}^R \left(\frac{Z}{(x_1-X)^2+Z^2} \right) dx_1$ と導出でき、 $x_1-X = Z \tan \phi$ の置換によって、 $\Omega_R^1 = \int_{\phi_B}^{\phi_A} d\phi$ (ただし、 $\tan \phi_A = \frac{R-X}{Z}$, $\tan \phi_B = \frac{-R-X}{Z}$) から式(1)のように解ける。さらに、式を整理することによって、円周角として有名であるように、角 Ω_R^1 が一定となる点 (X, Z) の軌跡が円弧であることもわかる。

$$\Omega_R^1[X, Z] = \tan^{-1} \left[\frac{R-X}{Z} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{R+X}{Z} \right], \quad X^2 + \left(Z - \frac{R}{\tan \Omega_R^1} \right)^2 = \left(\frac{R}{\sin \Omega_R^1} \right)^2 \quad (1)$$

本稿では、まず2章で、上記の1次元超球体での例を n 次元超球体を見込む n 次元超立体角 $\Omega_R^n[X, Z]$ に拡張して式を作る。次に3章で、 n 次元超立体角の最大値である n 次元超球面全体の超表面積 S^n を計算する。さらに4章で、半頂角が ψ の場合に求まる n 次元超立体角 $S_\psi^n = \Omega_R^n[0, Z]$ を導出する。それらをふまえて5章で、 $\Omega_R^n[X, Z]$ の一般解を1階の積分に帰着し、理論式と近似解を比較する。最後に6章で、応用や今後の課題について論述する。

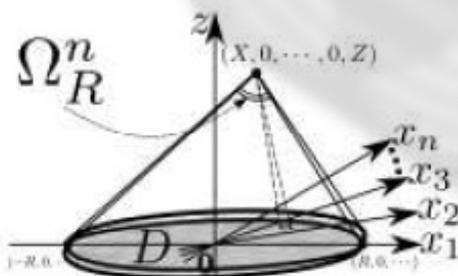


Fig 2: Hypersolid angle.

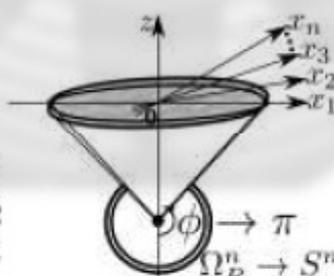


Fig 3: Hypersphere angle.

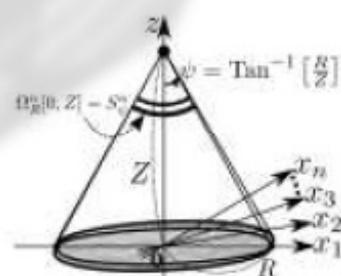


Fig 4: Hypercone angle.

2 HYPERSOLID ANGLE

Fig 2のように、原点を中心とする n 次元超球体全体の領域を D とし、説明のために以下仮に「舞台」と見立てて呼ぶことにする。このとき、点 $(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = (X, 0, \dots, 0, Z)$ から舞台 D を見込む n 次元超立体角 $\Omega_R^n[X, Z]$ は、文献[2]より式(2)のように書ける。

$$\Omega_R^n[X, Z] = \iint \dots \int_D \frac{Z dx_1 dx_2 \dots dx_n}{((x_1 - X)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + Z^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (2)$$

式(2)は、物理学でいう所の、微小領域から距離の $-(n+1)$ 乗に比例する中心力を受ける式とも似ているが、ベクトルの合成などの概念は含まれていない。この式は、式(3)のように原点を中心とする一般的な極座標での置換積分によって、式(4)のように変換される。

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1} \\ x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} \right| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}$$

$$\Omega_R^n[X, Z] = \iint \dots \int_D \frac{Z r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}}{(r^2 - 2Xr \cos \theta_1 + X^2 + Z^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\theta_{n-1} \dots d\theta_1 dr \quad (4)$$

式(4)の方が積分計算に適する場合(後述の式(13))もあるが、式(5)のように点 $(X, 0, \dots)$ を中心とした極座標で置換することで、式(6)のように扱いやすい形にも変換できる。

$$\begin{aligned} x_1 - X &= Z \tan \phi \cos \theta'_1 \\ x_2 - Z \tan \phi &= Z \tan \phi \sin \theta'_1 \cos \theta'_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= Z \tan \phi \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 \dots \cos \theta'_{n-1} \\ x_n &= Z \tan \phi \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 \dots \sin \theta'_{n-1} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\phi, \theta'_1, \dots, \theta'_{n-1})} \right| = \frac{Z^n \sin^{n-1} \phi \sin^{n-2} \theta'_1 \sin^{n-3} \theta'_2 \dots \sin \theta'_{n-2}}{\cos^{n+1} \phi}$$

$$\Omega_R^n[X, Z] = \iint \dots \int_D (\sin^{n-1} \phi \sin^{n-2} \theta'_1 \sin^{n-3} \theta'_2 \dots \sin \theta'_{n-2}) d\theta'_{n-1} \dots d\theta'_1 d\phi \quad (6)$$

式(6)は、 n 次元超立体角($(n+1)$ 次元単位超球体の超表面積の一部)の本質的な姿であり、後述の近似計算などに役立つ。以降では、この式を中心に解析計算を進める。

3 HYPERSPHERE ANGLE

各次元で一番大きな超立体角、すなわち、単位超球の超表面積全体を考える。まず、計算に必要な Wallis の公式の拡張である漸化式を式(7)に記す(文献[3]が詳しい)。

$$I_n[\psi] = I_n[\phi \rightarrow \psi] = \int_0^\psi \sin^n \phi d\phi = \frac{n-1}{n} I_{n-2}[\psi] - \frac{\cos \psi \sin^{n-1} \psi}{n} \quad (7)$$

$I_0[\psi] = \psi$ および $I_1[\psi] = 1 - \cos \psi$ より、任意の自然数 n で $I_n[\psi]$ の解析解が導出できる。特に、 $I_n[\pi]$ の場合は、文献[4]のベータ関数・ガンマ関数を用いて式(8)のように解ける。

$$I_n[\pi] = I_n[\phi \rightarrow \pi] = \int_0^\pi \sin^n \phi d\phi = B\left[\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n+2}{2}\right]}\right) \sqrt{\pi} \quad (8)$$

半径1の $(n+1)$ 次元超球体の超表面積(n 次元単位超球面)を S^n で表すと、上から舞台に限り無く近づく時 $\lim_{Z \rightarrow 0} \Omega_R^n[0, Z] = \frac{S^n}{2}$ とも考えられる。さらに、Fig 3のように便宜上 $Z < 0$ で超立体角が増えると考えerことで、式(6)の範囲を定めて式(9)のように求まる。

$$S^n = I_{n-1}[\phi \rightarrow \pi] I_{n-2}[\theta'_1 \rightarrow \pi] \cdots I_1[\theta'_{n-2} \rightarrow \pi] I_0[\theta'_{n-1} \rightarrow 2\pi] = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad (9)$$

これより、 $I_n[\pi] = \frac{S^{n+1}}{S^n}$ となることもわかる。ちなみに、半径 R の $(n+1)$ 次元超球体の超表面積が $S^n R^n = \left(\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) R^n$ であることは良く知られており、上記結果とも一致する。

4 HYPERCONE ANGLE BY SEMIAPEX ANGLE

Fig 4のように、超球錐の頂点から半頂角 $\psi = \text{Tan}^{-1}\left[\frac{R}{Z}\right]$ で舞台を見込んでいる場合、その n 次元超立体角 $\Omega_R^n[0, Z]$ (単位超球表面積の一部 S_ψ^n と書く)は式(10)のように求まる。

$$\Omega_R^n[0, Z] = S_\psi^n = S^n \left(\frac{I_{n-1}[\psi]}{I_{n-1}[\pi]}\right) = S^{n-1} I_{n-1}[\psi] = S^{n-1} I_{n-1}\left[\text{Tan}^{-1}\left[\frac{R}{Z}\right]\right] \quad (10)$$

式(10)の解だけを用いて、Fig 5のような近似が考えられる。まず、図左($A \cdot A'$)のように、距離が遠い場合などで、舞台がどんな視点からでも真上から見れるとすれば、同心円周(超球面)上で超立体角は等しいと近似できる。しかし実際は、真上から傾くにつれて舞台は潰れて見えるため、画像工学的な弱透視投影という手法を応用し、図中($B_+ \cdot B \cdot B_-$)のような近似が考えられる。図中では、傾き方向にだけ潰れた(超)楕円体を真上から見込む(超)立体角の計算となるが、厳密な計算は楕円積分のような式となり非常に難しい。

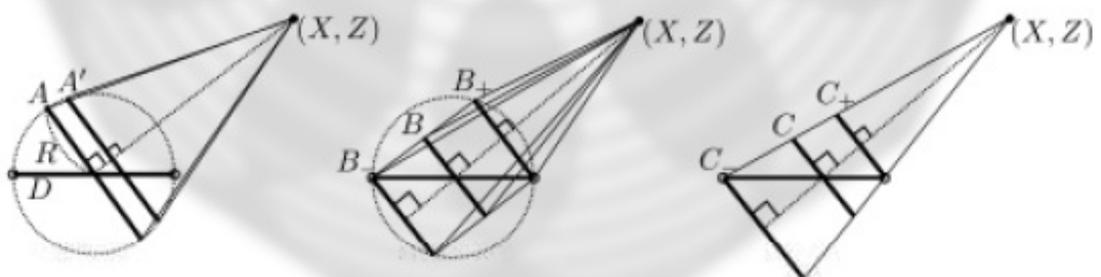


Fig 5: The approximate hyper-solid-angle of view of a hyper-ball.

本章で導出するのは、図右($C_+ \cdot C \cdot C_-$ どれも同じ)に示す視野の厳密な理論式である。

5 CALCULATION OF HYPER-SOLID ANGLE

まず、式(1)に習って、変数 ϕ の下限を $\phi_B = \text{Tan}^{-1}\left[\frac{-R-X}{Z}\right]$ 、上限を $\phi_A = \text{Tan}^{-1}\left[\frac{R-X}{Z}\right]$ とする。そして、式(6)について考えると、点 $(X, 0, \dots)$ を中心とする半径 $Z \tan \phi$ の半頂角 $\psi'[\phi] = \text{Cos}^{-1}\left[\frac{X^2 + Z^2 \tan^2 \phi - R^2}{2XZ \tan \phi}\right]$ で作られる $(n-1)$ 次元超球面 S_ψ^{n-1} 上では変数 θ'_i に依らない積分ができることなどから、式(11)のように1階の積分に帰着できることがわかる。

$$\Omega_R^n[X, Z] = \begin{cases} S^{n-1} I_{n-1}[\phi_A] + \int_{\phi_A}^{|\phi_B|} (S_{\psi'}^{n-1} \sin^{n-1} \phi) d\phi & (|X| < R) \\ \int_{|\phi_A|}^{|\phi_B|} (S_{\psi'}^{n-1} \sin^{n-1} \phi) d\phi = S^{n-2} \int_{|\phi_A|}^{|\phi_B|} (I_{n-2}[\psi'] \sin^{n-1} \phi) d\phi & (|X| \geq R) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、式(11)の解析解は Ω_R^1 は1章と一致しており、 $\Omega_R^2[0, Z] = 2\pi \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}}\right)$ とも一致する。この式(11)を用いて、 xz 平面第一象限上の各点での n 次元超立体角の近似値を計算する数値計算言語 Scilab のプログラムを <http://www7.atwiki.jp/neetubot/pub/ncontour.sce> のように作り、等高線のグラフにしたものを Fig 6 に示す。

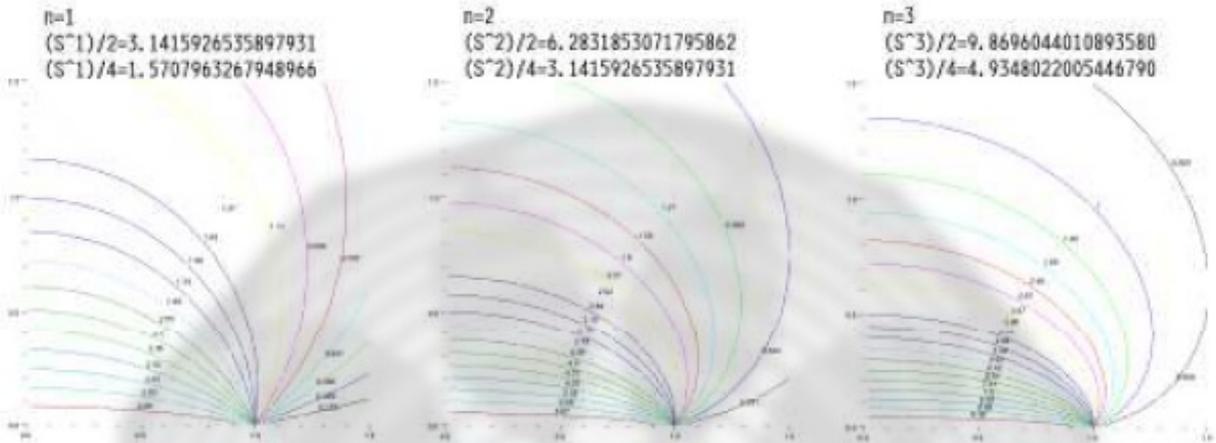


Fig 6: Contour map of the hypersolid angle.

Fig 6 のような、各次元における $\Omega_R^n[X, Z]$ が一定値 Ω^n となる軌跡は、 xz 平面の第二～四象限でも軸に対して線対称であり、ちょうど舞台を覆う形になる。これを拡張し、舞台の超球体がある n 次元方向とさらに法線軸方向の余剰 n' 次元を加えた $(n + n')$ 次元空間と考えた場合でも、同様な対称図形となることは明らかである。この超立体角が一定である軌跡の超曲面を「舞台包囲面」と呼ぶことにする。例えば、舞台包囲面は $n = 1$ の場合に式(1)の通りの円弧状となったが、シミュレーション結果などを詳しく調べていくうちに、高次元になるにつれて法線軸(z 軸) 方向に潰れていく傾向や、下記の性質があることがわかった。

- $\Omega^n = \frac{S^n}{2}$ となる舞台包囲面は、舞台の超球体の内部全体。
- $\frac{S^n}{4} < \Omega^n < \frac{S^n}{2}$ となる舞台包囲面は、舞台を囲む凸レンズ型。
- $\Omega^n = \frac{S^n}{4}$ の場合は、ちょうど舞台の n 本の半径を長径とし z 軸方向に短径を持つ n 次元扁超球面 (oblate hypersphere) に近い形となり、特にこれを直舞台包囲面と呼ぶ。
- $0 < \Omega^n < \frac{S^n}{4}$ となる舞台包囲面は、舞台を囲むヒョウタン型。
- $\Omega^n = 0$ となる軌跡は、 $Z = 0$ の超平面上の $|X| > R$ の部分と、空間の無限遠点全部。

ここで、舞台の超球表面上の点では、便宜上、上記の軌跡が全て通るといふ多価関数のような性質があると考えると都合が良い。この特異点に近づく極限値を詳しく解析するために、微小半径 t に対して角度 Θ の近傍円周上での超立体角 $\Omega^n = \lim_{t \rightarrow 0} \Omega_R^n[X = R + t \cos \Theta, Z = t \sin \Theta]$ の値を式(11)から計算したところ、式(12)の関係を発見した(数学的帰納法で証明できる)。

$$\frac{\Omega^n}{S^n} = \frac{\Theta}{2\pi}, \quad \text{すなわち, } \Omega^n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]} \Theta \quad (\text{ただし, } 0 \leq \Theta \leq \pi). \quad (12)$$

式(12)は、舞台袖の超球面上の点で、 $Z=0$ の超平面に対して一様に袖角 Θ の傾きを持つような舞台包囲面なら、超立体角が一定値 $\Omega^n = \frac{\Theta}{2\pi} S^n$ (あえて k 次元だけ見込む角なら $\Omega^k = \frac{\Theta}{2\pi} S^k$)の舞台包囲面であるということを表している。この関係を袖角術と名付ける。

6 CONCLUSION

本稿では、高次元超球体を見込む超立体角について、既知の定義や性質を通じて、任意の視点での解析解を1階の積分に帰着した。そして、その結果を用いた精度の良いシミュレーションによって、超立体角が一定値となる超曲面(舞台包囲面)の形を特定できた。

この舞台包囲面は、超立体角が全超立体角(単位超球表面積全体)の $\frac{1}{4}$ になるときを境に、凸レンズ型・扁超球面型・ヒョウタン型と移り変わるといふ美しい性質を持っている。さらに、一種の特異点となるような舞台袖での超立体角の極限值については、袖角術と名付けるシンプルな定数倍の解に帰着できることもわかった。

ちなみに、式(11)では積分範囲が計算しづらいことがあり、 $r \cos \theta_1 - X = Z \tan \phi \cos \theta'_1$, $r \sin \theta_1 = Z \tan \phi \sin \theta'_1$, $r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 dr = \frac{Z^n \sin^{n-1} \phi}{\cos^{n+1} \phi} d\theta'_1 d\phi$ という置換を用いて、式(4)のような式(13)とした方が、 $\Omega_R^n[X, Z]$ の解析解を求めるときなどに都合が良いことがある。

$$\Omega_R^n[X, Z] = Z S^{n-2} \int_{r=0}^R \int_{\theta_1=0}^{\pi} \left(\frac{r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1}{(r^2 - 2Xr \cos \theta_1 + X^2 + Z^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right) d\theta_1 dr \quad (13)$$

式(13)から計算した場合に、 n が奇数の場合だとよく有理関数の積分に帰着できたが、 n が偶数の場合は積分を初等関数で解くことは出来なかった。そこで、一般的な n 次元超立体角での舞台包囲面について、一部分ごとでも $\left(\frac{X}{R_X}\right)^n + \left(\frac{Z-C_Z}{R_Z}\right)^n = 1$ のような超特殊楕円面で近似するのが、扱いやすく最も応用に優れると感じた。そのためには、舞台包囲面の中で、 $\frac{dX}{dZ} = 0$ となる x 軸方向の X の最大値 R_X ・最小値 $-R_X$ とそのときの $Z = C_Z$ の値や、 z 軸方向の Z の最大値から短径 R_Z などの解析解を求める必要があるようである。

今後の課題としては、上記の近似解やさらに正確な積分解析について、今回お世話になった2ちゃんねる数学板の住人達などと、またこれからもっと考えていきたいと思う。

参考文献

- [1] Manuel Jaime Prata, "Solid angle subtended by a cylindrical detector at a point source in terms of elliptic integrals," Radiat. Phys. Chem. (2003) 67, 599-603, DOI:10.1016/S0969-806X(03)00144-0. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0211061v2>
- [2] 笠井剛, 周長・面積・体積の解析学~4次元球の体積は?~, 数学特論II, 2008-01-29. <http://my.reset.jp/~gok/math/pdf/spm/sphere.pdf>
- [3] 荒木圭典, sin・cosの n 乗の積分, あらきけいすけの雑記帳, 2005-07-01. <http://d.hatena.ne.jp/arakik10/20050701/p2>
- [4] 清野和彦, ガンマ関数とベータ関数, 数学IA演習補足解説, 2006-02-13. <http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/2006/miya-gamma.pdf>

1 本稿の説明

本稿では、文献 [1] の 2 点の補足をする。

2 袖角術の証明

文献 [1] の袖角術 $\Omega^n = S^n \frac{\Theta}{2\pi} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \Theta$ について、数学的帰納法を用いて証明する。

まず、半径 R の n 次元超球体の舞台を見込む n 次元超立体角は、文献 [1] (の式 (11)) より $X \geq R$ の場合に式 (1) のように表せる。(ちなみに、文献 [1] から考えて、 $S^{-1}I_{-1}[\psi] = S^0_\psi = 1, S^0 = 2$ と便宜上考えると都合が良い.)

$$\Omega^n_R[X, Z] = S^{n-2} \int_{\phi_A}^{\phi_B} I_{n-2}[\psi] \sin^{n-1} \phi d\phi$$

(ただし、 $\cos \psi = \frac{Z^2 \tan^2 \phi + X^2 - R^2}{2XZ \tan \phi}$,
 $\phi_B = \tan^{-1} \left[\frac{X+R}{Z} \right]$, $\phi_A = \tan^{-1} \left[\frac{X-R}{Z} \right]$.) (1)

ここで、Fig 1 のように考え、舞台を見込む超立体角について、舞台袖近傍での極限値を $\Omega^n = \lim_{t \rightarrow 0} \Omega^n_R[R + t \cos \Theta, t \sin \Theta]$ で導出する。

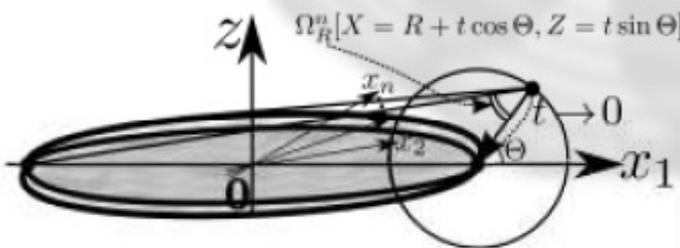


Fig 1: 超球舞台袖近傍での超立体角の極限。

式 (1) に座標の値を代入し $t \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\cos \psi = \frac{1}{\tan \Theta \tan \phi}$, $\phi_B = \frac{\pi}{2}$, $\phi_A = \frac{\pi}{2} - \Theta$, $\Omega^1 = \phi_B - \phi_A = \Theta$ となり、 Ω^2 は式 (2) のように解ける。(以降、 ϕ での微分を ' で略記する.)

$$\Omega^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{2}-\Theta}^{\frac{\pi}{2}} \psi (-\cos \phi)' d\phi$$

$$\Omega^2 = -[2\psi \cos \phi]_{\frac{\pi}{2}-\Theta}^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int \frac{\cos \phi (\cos \psi)'}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi}} d\phi$$

ここで、 $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \phi = 0$, $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}-\Theta} \psi = 0$ を使う。

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{2}-\Theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Theta / \tan \phi}{\sqrt{\sin^2 \Theta - \cos^2 \phi}} d\phi$$

このとき、 $\cos \phi = \sin \Theta \cos \alpha$ で置換する。

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Theta \sin \Theta \cos \alpha}{1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \alpha} d\alpha$$

さらに、 $\tan \Phi = \tan \Theta \sin \alpha$ の置換を用いる。

$$= 2 \int_0^\Theta \frac{(\tan \Phi)' d\Phi}{1 + \tan^2 \Phi} = [2\Phi]_0^\Theta = 2\Theta \quad (2)$$

一般的な $n \geq 3$ については、 $\Omega^n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \Theta$ が成り立つと仮定した時、 $\Omega^{(n+2)}$ の場合に成り立つことから数学的帰納法によって証明する。

$$\Omega^{(n+2)} = S^n \int_{\frac{\pi}{2}-\Theta}^{\frac{\pi}{2}} I_n[\psi] \sin^n \phi (-\cos \phi)' d\phi =$$

$$S^n \left([-I_n[\psi] \sin^n \phi \cos \phi]_{\frac{\pi}{2}-\Theta}^{\frac{\pi}{2}} + \int (I_n[\psi])' \sin^n \phi \cos \phi d\phi + n \int I_n[\psi] \sin^{n-1} \phi \cos^2 \phi d\phi \right) \quad (3)$$

式 (3) について、第 1 項目は $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \phi = 0$, $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}-\Theta} I_n[\psi] = 0$ より 0 となり、第 3 項目に $\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi$ を代入し、式 (4) が導ける。

$$(n+1)\Omega^{(n+2)} = S^n \int ((I_n[\psi])' \sin^n \phi \cos \phi + n I_n[\psi] \sin^{n-1} \phi) d\phi \quad (4)$$

式 (4) の $(I_n[\psi])'$ は、式 (5) のように解ける。

$$(I_n[\psi])' = \frac{d\psi}{d\phi} \frac{d}{d\psi} \int_0^\psi \sin^n \theta d\theta = \frac{\sin^{n-1} \psi \cos \psi}{\sin \phi \cos \phi} \quad (5)$$

また、 $I_n[\psi]$ は、式 (6) の漸化式に展開できる。

$$n I_n[\psi] = (n-1) I_{n-2}[\psi] - \sin^{n-1} \psi \cos \psi \quad (6)$$

上記をふまえて、式(4)の第1項目に式(5)を、第2項目に式(6)を代入することにより、ちょうど相殺し $\Omega^{(n+2)}$ について式(7)が成り立つ。

$$\begin{aligned}\Omega^{(n+2)} &= \frac{(n-1)}{(n+1)} S^n \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} I_{n-2}[\psi] \sin^{n-1} \phi d\phi \\ &= \frac{(n-1)S^n}{(n+1)S^{(n-2)}} \Omega^n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n+3}{2}\right]} \Theta \quad (7)\end{aligned}$$

以上より、文献[1]の袖角術 $\Omega^n = S^n \frac{\Theta}{2\pi}$ が自然数 $n \geq 1$ の全てについて成り立つと言える。

3 球体を見込む3次元超立体角

文献[1](の式(13))について、球体を見込む3次元超立体角 $\Omega_R^3[X, Z]$ の解析解を導出する。

$$\begin{aligned}\Omega_R^3 &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{2\pi Z r^2 \sin \theta}{(r^2 - 2Xr \cos \theta + X^2 + Z^2)^2} \right) d\theta dr \\ &= \int_{r=0}^R \left[\left(\frac{(-\pi Z r)/X}{r^2 - 2Xr \cos \theta + X^2 + Z^2} \right) \right]_{\theta=0}^{\pi} dr \\ &= \int_{r=0}^R \left(\frac{(\pi Z r)/X}{(r-X)^2 + Z^2} - \frac{(\pi Z r)/X}{(r+X)^2 + Z^2} \right) dr \\ \text{前者は } r &= X + Z \tan \phi, \text{ 後者は } r = -X + Z \tan \phi' \text{ で置換する。} \\ &= \pi \left(\int \left(1 + \frac{Z}{X} \tan \phi \right) d\phi + \int \left(1 - \frac{Z}{X} \tan \phi' \right) d\phi' \right) \quad (8)\end{aligned}$$

式(8)の積分範囲の下限はちょうど相殺し、文献[1](の式(1))より $\Omega_R^1 = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{R-X}{Z} \right] + \text{Tan}^{-1} \left[\frac{R+X}{Z} \right]$ であるので、結局式(9)が求まる。

$$\Omega_R^3[X, Z] = \pi \left(\Omega_R^1 - \frac{Z}{X} \log \left(\sqrt{\frac{(R+X)^2 + Z^2}{(R-X)^2 + Z^2}} \right) \right) \quad (9)$$

また、文献[1](の式(11))からも式(9)と同じ結果が出ることを以下に記述する。

$$\begin{aligned}\Omega_R^3[X, Z] &= 2\pi \int_{\phi_A}^{\phi_B} (1 - \cos \psi) \sin^2 \phi d\phi \\ &= \pi \int_{\phi_A}^{\phi_B} \left(\frac{R^2 - (X - Z \tan \phi)^2}{XZ \tan \phi} \right) \sin^2 \phi d\phi \\ &= \pi \int_{\phi_A}^{\phi_B} \left(1 - \cos 2\phi + \frac{R^2 - X^2 + Z^2}{2XZ} \sin 2\phi - \frac{Z}{X} \tan \phi \right) d\phi \\ &= \pi \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} - \frac{R^2 - X^2 + Z^2}{4XZ} \cos 2\phi + \frac{Z}{X} \log |\cos \phi| \right]_{\phi_A}^{\phi_B} \quad (10)\end{aligned}$$

式(10)に対して、 $\phi_B = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{X+R}{Z} \right]$, $\phi_A = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{X-R}{Z} \right]$ を代入すれば、第2項目と第3項目の和がちょうど相殺して0になり、結局式(9)が導出されることになる。この理論式(9)のグラフと、積分式から逐次計算した近似のグラフは、Fig 2左に示すようにちょうど一致する。

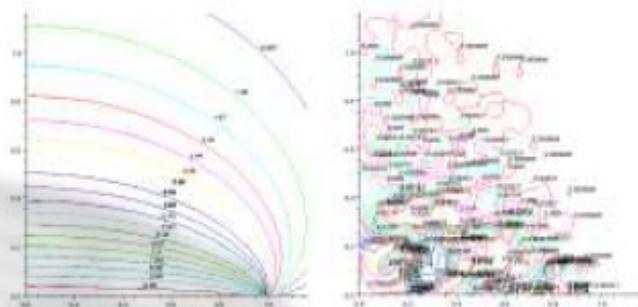


Fig 2: Ω_R^3 の理論解と積分近似の一致と差分。

Fig 2右は、 Ω_R^3 の理論解と積分近似の誤差の大きさの分布を表している。TABLE 1のように局所的に最大誤差が大きい場所があるが、積分近似の逐次計算の分割数を上げていくことで、標準偏差でもわかるように精度が良くなる。

TABLE 1: Ω_R^3 の理論解と積分近似の誤差

積分分割	100	200	300	400
標準偏差	0.028	0.015	0.010	0.008
最大誤差	0.163	0.083	0.055	0.038

4 まとめと考察

本稿では、文献[1]で抜けていた2つ(袖角術の数学的帰納法による証明と、球体を見込む3次元超立体角の解析解)について詳解した。

前者も後者も大学生レベルの初等関数解析学の分野と思われたが、部分・置換積分の連続やガンマ関数など非常に濃い内容の演習問題で勉強になった。解析解も非常に美しい物で、今後z軸上 $\Omega_R^n[0, Z]$ や奇数次元 $\Omega_R^{2k+1}[X, Z]$ の一般解の導出も視野に入れてさらに考えていきたい。

これから、これらの多くの一見トリビアな問題や公式などを名無初等幾何学会 <http://www.freeml.com/egs> で分類しまとめていきたい。

参考文献

- [1] 高次厨, 高次元超球体を見込む超立体角について, 名無初等幾何学会, 2011-08-12.

高次元超球体を見込む超立体角について

<http://p.booklog.jp/book/32279>

Publisher : 名無初等幾何学会

<http://p.booklog.jp/users/neetubot/profile>

感想はこちらのコメントへ

<http://p.booklog.jp/book/32279>

ブックログのpapier本棚へ入れる

<http://booklog.jp/puboo/book/32279>

電子書籍プラットフォーム : ブクログのpapier (<http://p.booklog.jp/>)

運営会社 : 株式会社paperboy&co.