ちょっと計算してみよう

stabucky

日本シリーズは第何戦まで行われるか

日本のプロ野球はセ・リーグとパ・リーグに分かれていて、それぞれの優勝チームが決定した後、日本一を賭けて優勝チーム同士で対決する。先に4勝した方が勝ちになるので引き分けなどがなければ最大第7戦まで行われることになるが、場合によっては第4戦で勝負がついてしまうこともある。ではそれぞれのチームの力が五分五分（つまり勝つ確率が2分の1）のとき、第何戦まで行われる確率が最も大きいか。
まず4戦で勝負がつくときを考える。これはどちらかが4連勝すればよいから

$(1/2)^4*2=1/8$

次に5戦で勝負がつくとき。注意するのは5戦中4勝と考えてはいけないことである。これは4連勝の後1敗というケースを含んでしまっているからだ。4連勝したらその時点でシリーズは終わっている。そこで4戦までに3勝して5戦目でもう1勝すると考えよう。

${}_4C_3*(1/2)^3*(1-1/2)*2=1/4$

${}_4C_3$は4個から3個取り出すときの組み合わせの数を表す。

後は同様である。6戦で勝負がつくときは5戦中3勝してから1勝と考える。7戦でやっと勝負がつくのは6戦中3勝してから1勝するときと考えればよい。

${}_5C_3*(1/2)^3*(1-1/2)^2*2=5/16$

${}_6C_3*(1/2)^3*(1-1/2)^3*2=5/16$

面白いことに第6戦で終わる確率と第7戦で終わる確率は同じになった。これらが最大である。

巴戦で最も有利なのは誰か

大相撲は1場所につき、各力士がそれぞれ15番行い、最も勝ち数の多かった者が、その場所の優勝力士となる。もし勝ち数が同じ時には優勝決定戦を行う。2力士が同点のときには1番で済むが、3人のときにはどうするかというと、大相撲独特の巴戦(ともえせん)という方法を用いる。この巴戦とは、誰かが2連勝したら終わりというもので、初めは3人のうちの2人が対戦し、その後勝った方と残りの1人が対戦する。連勝すれば、そこで優勝だが、連勝出来ないときには、先程敗れた力士が再登場し、また対戦し、以下これを繰り返す。
では3力士の力量が同じと仮定すると（つまり勝つ確率がそれぞれ2分の1）誰が最も勝ちやすいか。
Ａ、Ｂ、Ｃの三人がいるとし、最初はＡとＢが対戦、その勝者とＢが対戦することにする。このときＡとＢの勝つ確率が同じことは明らかであるのでＣの勝つ確率を計算すればよい。なぜならＣの優勝する確率をpとするとＡの勝つ確率は(1-p)/2で容易に計算出来るからだ。
ＡとＢが対戦しＡが勝ったとき、次のＡとＣの対戦でＣは勝たなくてはならない。そして次のＣとＢの対戦でＣが勝てばＣの優勝が決まる。ここまで3試合あったのでここでＣの優勝する確率は$(1/2)^3$である。
ところがＢが勝ってしまったとき、次にＣが勝つチャンスが巡ってくるのは3試合後。ここで優勝する確率は$(1/2)^6$。
これを繰り返すと3試合毎にチャンスがまわってくることが分かるので、その確率はそれぞれ$(1/2)^9$、$(1/2)^{12}$、…、という具合になる。つまり初項1/8、公比1/8の無限等比級数を計算すればよいことになり、これは1/7となる。
初めのＡとＢの対戦でＢが勝ったときも同じ結果になるのでＣが優勝する確率は2/7となり、ＡとＢが勝つ確率はそれぞれ5/14となる。

がまのあぶらうり

ガマとはヒキガエルのことである。このヒキガエルから採集される分泌液を、ガマの油という。成分はブフォニンで、強心興奮作用があり、その塗り薬は、あかぎれなどの治療に使用された。この塗り薬を売るときの香具師の口上が有名な「1枚が2枚、2枚が4枚」というものである。香具師は刀を持っていて、懐から取り出した1枚の紙を半分に折り曲げ、切る。2枚になる。これをさらに半分に折り曲げ、切ると4枚になる。8枚になる。良く切れるのだということを示し、このあと、手の甲などを、刀で軽く切って(絵の具が仕掛けてあるのかもしれないが)血を噴き出させたあと、塗り薬を塗る、という段取りになっている。
これはあくまでもパフォーマンスである。1枚、2枚、4枚、8枚のあと、さらにこれを続けるとどうなるか、ということの方が面白いだろう。
次に挙げる数字が何を示しているか、分かるだろうか。

0	1
10	1,024
20	1,048,576
30	1,073,741,824

これはそれぞれ、2の0乗、2の10乗、2の20乗、2の30乗を示している。つまり、刀で1枚の紙を10回、切ると、1,024枚になるということだ。たった10回の行為で1,000倍になってしまうところが面白い。20回の行為で100万倍、30回の行為で、なんと10億倍である。紙の厚さが10分の1ミリだったとしても、100キロメートルになる。厚さが100キロメートルである。そもそもこんな厚い紙を刀で切ることなどできないし、半分に折り曲げることもできないだろう。
10乗分、増えるごとに、カンマが一つずつ増えているが、どれもかなり切りのいい数値になっている。この3桁ごとにカンマを付ける方法は、英語における習慣である。数え方も、thousand(千)、million(百万)、billion(十億)、と3桁ごとに呼び方が変わっていて、合理的なように思える。なぜ、英語の数え方は3桁なのか、ということの答えになっているのかもしれない。英語圏の人たちは、2の10乗がほぼ1,000になることを知っていたからではないか。

2^{0}	1	一	one
2^{10}	1,024	千	thousand
2^{20}	1,048,576	百万	million
2^{30}	1,073,741,824	十億	billion

正多面体は何種類あるか

正三角形や正方形(正四角形)など、正多角形が組み合わさってできる立体を正多面体という。ただし、頂点に集まる辺の数はどの頂点も同じ数であるものに限る。
立方体は、正方形(正四角形)が6面、組み合わさってできる立体、正6面体である。正三角形が4面、組み合わさってできる立体は正4面体である。この正4面体を2個用意して、ある面同士を貼り合わせると、どの面も正三角形であるという立体ができるが、これは正多面体とは呼ばない。辺が3本集まる頂点と、辺が4本集まる頂点があるからである。
さて、この正多面体は何種類あるだろうか。
正三角形がいくつも組み合わされば、何種類でもできそうな感じもするが、実はそうではない。
次の表は、正多角形の内角を表している。なお、正七角形の内角は端数を四捨五入している。
正多角形の内角

正多角形	内角
正三角形	60度
正四角形	90度
正五角形	108度
正六角形	120度
正七角形	129度
正八角形	135度

正多面体の一つの頂点には正多角形がいくつか集まっている。たとえば、正六面体(立方体)ならば、正四角形(正方形)が4個集まっている。3個以上集まらないと立体にならないことは明らかである。
また、正多角形を組み合わせたときに**360**度未満でないと立体にならない。正三角形ならば5個以下、正四角形ならば3個以下、正五角形も3個以下でないと立体にならない。正六角形ならば3個以上集まってしまうと360度以上になってしまうため、これは立体にならない。正七角形も正八角形も、それより角の多い正多角形では正多面体は作れないことが分かる。
正多角形の内角を組み合わせると

正多角形	内角	**3**個	**4**個	**5**個
正三角形	60度	180度	240度	300度
正四角形	90度	270度	360度	450度
正五角形	108度	324度	432度	540度
正六角形	120度	360度	480度	600度

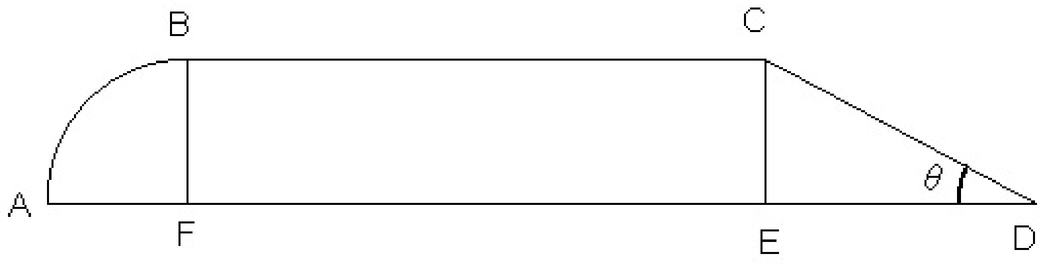
つまり、次の5パターンでしか、正多面体は作れないことが分かる。これが答えである。
正三角形-3個
正三角形-4個
正三角形-5個
正四角形-3個
正五角形-3個
実際、何面の組み合わせになるかは次の通りである。

正4面体　正三角形
正6面体　正四角形
正8面体　正三角形
正12面体 正五角形
正20面体 正三角形

正4面体は容易に想像できるだろう。正6面体はさいころの形である。正8面体は、ピラミッド(底が正方形)2個の底同士を貼り合わせた形である。
正12面体は想像しにくい。床に正五角形をおく。同じ大きさの正五角形を5個用意して、床においた正五角形の5辺と、それぞれの正五角形の1辺を貼り合わせる。そして次に隣の辺同士を貼り合わせると、それぞれの面が正五角形が6個集まった皿のような立体ができる。この立体を2個用意して、上下で組み合わせた立体が正12面体である。
正20面体はさらに想像しにくい。まず、正三角形のそれぞれの頂点を直線で切り落として正六角形を作ることができる、ということを頭に入れておく。さて、正20面体の身近な例は、サッカーボールである。これは正五角形と正六角形が組み合わさってできている。実は、正20面体のすべての面(正三角形)の頂点を切り落とした立体なのだ。面が5個集まった頂点を切り落とすとそこには五角形ができるだろう。そして元々、正三角形だった面は、正六角形になる。つまり、サッカーボールには20枚の六角形がある。五角形がいくつあるかは、次の通り。
正20面体の辺は何本あるか、とまず考える。正三角形が20個集まってできたのだから、3*20=60。2辺が組み合わさって1辺となるのだから、この半分で、辺の数は30本。正20面体は一つの頂点に正三角形が5個集まっているのだから、辺の数も5本。したがって、頂点は6個ある。ここを切り落とすのだから、正五角形は6個ということが分かる。さあ、正しいかどうか、ジーコに訊いてみてくれ。

本を開いたときの小口の傾きは厚い本と薄い本ではどちらが大きいか

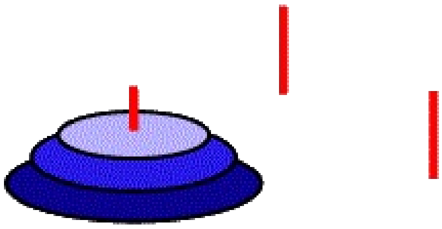
本は、言ってみれば、直方体である。したがって6面を持つ。表紙、背表紙、裏表紙がまず3面。残りの3面、ページの切り口がある面を小口(こぐち)という。上・下を天・地、背の反対のところを前小口といい、小口といえば、普通、前小口を指す。
さて、この前小口だが、少し厚みのある本を開き、背がぴったりと机に付くようにしてやると、前小口の部分が坂のように傾くだろう。この傾きは、本の厚さによってどう変わるだろうか。



AFのところが本の背に当たる。表紙はDFのところである。ACは字の書いてあるページの部分にあたる。CDのところが小口である。今、角CDEをθとしているが、CDが直線となるかどうかもはっきりしないのに、角CDEなどを考えてしまっているのはまずいかもしれない。点Cと点Dを結ぶ直線を考えれば、実際に小口が直線なのかどうかは関係ない。
ACのページの幅とDFの表紙の幅は同じである。したがって、AB+BC=DE+EF。BC=EFであるから、DE=ABとなる。
本の厚みに当たるBFはもちろんCEと同じ長さであるし、本の背の部分とも同じ長さになる。したがって、BF=CE=AF。この長さをaとする。
さて、ABは90度の扇型の弧に当たるので、AB=2π×AF÷4=πa/2。
DEとCEの比を求めると、DE/CE=AB/CE=(πa/2)/a=π/2。これは定数である。DEとCEの比は一定、つまり角θは一定ということになる。
本の厚さに関わらず、本の大きさに関わらず、常に小口の傾きは同じであるということである。*tan*θ=π/2となるθは約32.5度である。CDが直線となるかどうかははっきりしないと先に書いたが、実際には直線になる。

塔

ここに3本の棒が立っている。左端の棒には3枚の大きさの違う円盤が突き刺さっている。円盤は下から大中小の順になっている。



この3枚の円盤を別の棒に移し替えたいのだが、ルールがある。
棒から棒に動かす。
一度に動かせるのは1枚だけ。
下の円盤より大きな円盤を載せてはいけない。
さて、どうすればよいか。
円盤が3枚のとき、最短の作業回数は7回である。
円盤を1枚増やし、4枚とすると、作業回数は15回となる。

一般に、円盤がn枚のときには、2^n-1回の作業が必要である。
さて、これを証明してみよう。ここで、数学的帰納法を使う。
n=1が成立することを示す。
まず、n=1のとき成立することを示す。
円盤1枚を別の棒に刺すだけだから、作業回数は1回。n=1のとき、$2^n-1=1$である。よって示せた。
n=kが成立すると仮定し、**n=k+1**が成立することを示す
次に、n=kのとき成立すると仮定する。
今、円盤が位置Aにk+1枚ある。これを位置Cに移したい。
まず、上からk枚を位置Bに移す。n=kのとき成立しているのだから、ここまでの作業回数は**2^k-1**回。
一番下のk+1枚目を位置Cに移す。この作業回数が**1**回。
位置Bにあるk枚を位置Cのk+1枚目の上に移すのは、位置Aから位置Bにk枚を移動させたのと同じことだから、ここでの作業回数は**2^k-1**回。
これらの一連の作業回数は$2^k-1+1+2^k-1=2^k+2^k-1=2*2^k-1=2^{k+1}-1$
つまりk+1枚を移すのに2^{k+1}-1回の作業が必要であった。
言い換えると「n=k+1のときに2^n-1回の作業が必要である」ということが正しいことが示された。

n項までの和を求める

1+2+3+…+n
という式がある。「1からnまでの和」である。Σという記号を使って、次のように表すことにする
。
Σk = 1 + 2 + 3 + … + n
kに1からnまでの数を当てはめて、それらの和を計算するという意味である。だから、Σ2kと書くと、次のような意味になる。
Σ2k = 2 + 4 + 6 + … + 2n
同様にΣk^3、Σ1/kはそれぞれ、
$\Sigma k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$
Σ1/k = 1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n
という意味である。
ところで、1+2+3+…+nは実際、どんな式で表されるだろう。
S=1+2+3+…+nとする。普通、こういうときは、Sを使う。なぜかというと、**s**umに合計という意味があるからだ。
さて、1+2+3も3+2+1も同じになるので、次のように計算することができる。
S= 1 + 2 + 3 + … + n-2 + n-1 + n
S= n + n-1 + n-2 + … + 3 + 2 + 1
両辺同士を足し合わせると、
2S = 1+n + 2+n-1 + 3+n-2 + … + n+1
2S = 1+n + 1+n + 1+n + … + n+1
右辺は1+nがn個集まっている。つまり右辺=(1+n)*n=n(n+1)
したがって、S=n(n+1)/2
たとえば1から10までの数の和を知りたければ、この式のnに10を代入すればよい。
10*(10+1)/2=55となる。
1から100までの数の和は、100*(100+1)/2=5050となる。くれぐれも550ではないことに注意。
さて、こんな問題がある。
$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$を示せ。
証明は次の通りである。
$(1+k)^3=1+3k+3k^2+k^3$である。このkに1からnまで代入してみると

k=1	$2^3=1+3*1+3*1^2+1^3$
k=2	$3^3=1+3*2+3*2^2+2^3$
k=3	$4^3=1+3*3+3*3^2+3^3$
…	…
k=n	$(1+n)^3=1+3*n+3*n^2+n^3$ (+
	$(1+n)^3=n+3\Sigma k+3\Sigma k^2+1$

左辺と次の段の右辺第4項が等しいので消しあうことに注意。
$\Sigma k=n(n+1)/2$は既知のものとして変形すると

$3\Sigma k^2=(1+n)^3-n-3n(n+1)/2-1$

簡単のため両辺に2をかけると

$$
\begin{aligned}
6\Sigma k^2 &= 2(1+n)^3-2n-3n(n+1)-2 \\
&= 2+6n+6n^2+2n^3-2n-3n^2-3n-2 \\
&= 2n^3+3n^2+n \\
&= n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

よって示された。

もしΣk^3 がどうなるかを求めたければ$(1+n)^4$を計算して上と同様な方法を使えばよい。
一般に、この方法を用いれば次数がどんなに大きな整数であっても帰納的にその和を求めることができる。

漸化式

1、3、5、7、と続く数がある。この先がどうなるのかは簡単に予測が付く。
さて、1、3、7、13、と続く数がある。この先がどうなるのかは難しい。これを探る方法がある
。

$a_1=1$

$a_2=3$

$a_3=7$

$a_4=13$

a_nを、nを使った式で表すことができればよい。

$b_n=a_{n+1}-a_n$

とする。隣り合った数の差を調べるのである。

$b_1=2$

$b_2=4$

$b_3=6$

$b_4=8$

b_nが次のように表されることはすぐ分かるだろう。

$b_n=2n$

b_1からb_nまでの和を計算すると、

$\Sigma b_k=2\Sigma k=2*(n*(n+1)/2)=n*(n+1)$

となる(「n項までの和を求める」を参照)。一方、

$b_1=a_2-a_1$

$b_2=a_3-a_2$

$b_3=a_4-a_3$

$b_n=a_{n+1}-a_n$

としたときの右辺の和を計算すると、

$a_{n+1}-a_1=a_{n+1}-1$

となる。つまり、

$a_{n+1}=n*(n+1)+1$

したがって、

$a_n=(n-1)*n+1$

$a_n=n^2-n+1$

となる。
次の問題。

$a_1=1$

$a_2=3$

$a_3=7$

$a_4=15$

$a_5=31$

$b_n=a_{n+1}-a_n$

とすると、

$b_1=2$

$b_2=4$

$b_3=8$

$b_4=16$

となるので、

$b_n=2^n$

となることは明らか。b_1からb_nまでの和を計算すると、

$\Sigma b_k=\Sigma 2^k=\mathbf{2^{n+1}-2}$

となる(「2のn乗までの和」を参照)。一方、

$b_1=a_2-a_1$

$b_2=a_3-a_2$

$b_3=a_4-a_3$

$b_n=a_{n+1}-a_n$

としたときの右辺の和を計算すると、

$\Sigma b_k=a_{n+1}-a_1=a_{n+1}-1$

したがって、

$a_{n+1}-1=2^{n+1}-2$

$a_{n+1}=2^{n+1}-2+1$

$a_{n+1}=2^{n+1}-1$

$a_n=2^n-1$

順列と組み合わせ

$_nP_k$という記号は、n個の物からk個を取ってきて並べると何通りあるかを示す。順列という。

$_nP_k$=n!/(n-k)!=n・(n-1)・…・2・1/{(n-k)・(n-k-1)・…・2・1}

$_nC_k$という記号は、n個の物からk個を取ってきて組み合わせると何通りあるかを示す。組み合わせといい、順列とは違い順序は問わない。1-2-3、1-3-2、2-1-3、2-3-1、3-1-2、3-2-1、これらは同じものと見なす。

$_nC_k$=n!/(k!・(n-k)!)=n・(n-1)・…・2・1/{k・(k-1)・…・2・1・(n-k)・(n-k-1)・…・2・1}

正多角形の内角

正多角形に限らず、n角形の内角の和は次の式で表される。証明はn角形が三角形をn-1個、組み合わさってできること、三角形の内角の和は180度であること、から示される。
内角の和=(n-2)*180
したがって、正多角形の一つの内角は次のような式で表される。
正多角形の内角=(n-2)*180/n

等比級数

$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots+ar^n$

$rS=ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+\ldots+ar^{n+1}$

$S-rS=(1-r)S=a-ar^{n+1}=a(1-r^{n+1})$
したがって、

$S=a(1-r^{n+1})/(1-r)$

$r<1$のとき、$n\to$無限大にすると$r^{n+1}\to 0$となるから、$S\to a/(1-r)$