



ローレンツ収縮の真実



～電車とトンネルのパラドックス～

— 付録 —

蔭山篤司



ローレンツ収縮の真実

～電車とトンネルのパラドックス～

－ 解消編 －

付録

蔭山篤司

2025 年

付録

ローレンツ変換の導出

2つの慣性系があり、一方を K 系とし、時間と位置を (t, x) で表し、他方を K' 系とし、 (t', x') で表します。 x 軸と x' 軸は平行で、 K 系から見て K' 系の x' 軸は x 軸の正の向きに速さ v で移動しており、光速を c とします。 $t = t' = 0$ のとき、二つの系の原点が一致 ($x = x' = 0$) していたとします。(「はじめに」の中で示した設定と同じです。)

ここで光速度不変の原理が成り立つことから導かれる K 系と K' 系の間の位置 (x と x') と時間 (t と t') の間で成り立つ関係を求めます。この結果は「ローレンツ変換」と呼ばれています。

光速度不変の原理より、どちらの系においても光の速さは同じであり、 $x = ct$, $x' = ct'$ なので

$$x^2 - (ct)^2 = 0 = (x')^2 - (ct')^2 \quad (1.1)$$

が成り立っています。このとき、 K 系と K' 系の間に、

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) = A(x - \beta ct), & \beta &= v/c, \\ t' &= Bx + Dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

の関係が成り立っているとして、定数係数 A 、 B 、 D を求めます。(1) 式に (1.2) 式を代入して係数を比較することにより求めることができます。(この係数は一方の系から他方の系を見たとき、時間や距離(長さ)が何倍になっているかを表すことになります。)

$$\begin{aligned} & x^2 - (ct)^2 \\ &= A^2 (x^2 - 2\beta cxt + \beta^2 c^2 t^2) - c^2 (B^2 x^2 + 2BDxt + D^2 t^2) \\ &= (A^2 - c^2 B^2) x^2 - 2c(\beta A^2 + cBD) xt + (A^2 \beta^2 - D^2) c^2 t^2 \end{aligned}$$

左辺と右辺の係数を比較すると

$$A^2 - c^2 B^2 = 1 \dots\dots\dots ①$$

$$D^2 - \beta^2 A^2 = 1 \dots\dots\dots ②$$

$$-2c(\beta A^2 + cBD) = 0 \dots\dots\dots ③$$

より $A^2 = 1 + c^2 B^2$ として、これを、 に代入します。

$$D^2 - \beta^2 (1 + c^2 B^2) = 1 \dots\dots\dots ④$$

$$\beta (1 + c^2 B^2) + cBD = 0 \dots\dots\dots ⑤$$

より

$$D = -\frac{1 + c^2 \beta^2}{cB} \beta \dots\dots\dots ⑥$$

これを に代入すると

$$\frac{(1 + c^2 B^2)^2}{c^2 B^2} \beta^2 - \beta^2 (1 + c^2 B^2) = 1 \dots\dots\dots ⑦$$

両辺に $c^2 B^2$ をかけて

$$(1 + c^2 B^2)^2 \beta^2 - \beta^2 (1 + c^2 B^2) c^2 B^2 = c^2 B^2$$

となります。展開して B について整理すると

$$(1 + c^2 B^2) \beta^2 = c^2 B^2$$

これから

$$B^2 = \frac{\beta^2}{c^2 (1 - \beta^2)}$$

よって

$$B = \pm \frac{\beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

この結果と、より A 、 D も求まり、

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$D = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

となります。ここで $v \rightarrow 0$ のとき $x' = x$ 、 $t' = t$ とならなければならないので $A > 0$ 、 $D > 0$ 、 $B < 0$ となります。その

結果は、 $\beta = \frac{v}{c} < 1$ として¹

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ B &= -\frac{\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ D &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}$$

が求まります。ここで $ct = x_0$, $ct' = x'_0$, $x = x_1$, $x' = x'_1$ と
して、上の結果を代入して (1.2) 式を書き直すと

$$K \text{ 系} : (ct, x) = (x_0, x_1), K' \text{ 系} : (ct', x') = (x'_0, x'_1),$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_0 &= \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

という関係が成り立っていることがわかります。この関係をローレンツ変換と言います。

著者紹介

著者略歴

島根県松江市出身

島根県立松江東高校卒業

（お笑い芸人かまいたちの山内健司さんも同校の卒業生）

大阪大学理学部物理学科卒業

新潟大学大学院理学研究科前期修士課程物理学専攻修了

同自然科学研究科後期博士課程エネルギー基礎科学専攻修了

現在 静岡県立高校物理教師

以下は「無名の著者」が「怪しいものではない」ということを示すために載せました

主な研究テーマ及び論文

素粒子論、 超対称性、 超対称標準模型

アノマラス $U(1)$ による超対称性のダイナミカルな破れ
超対称標準模型におけるニュートリノの質量行列の計算

Effective theory description of anomalous $U(1)$ supersymmetry breaking and its embedding into supergravity

A.Kageyama, T.Ozeki, H.nakano, Y.Qatanabe

Prog.Theor.Phys.101(1999)439

Low-energy constraints from unification of matter multiplets

A.Kageyama, M.Tanimoto, K.Yoshioka

Phys.lett.B512(2001)349

Lepton flavor violating processes in the bimaximal texture of neutrino mixings

A.Kageyama, S.Kaneko, N.Shimoyama, M.Tanimoto

Physical Review D 65 (9), 2002-05-14

See-Saw Realization of the Texture Zeros in the Neutrino

Mass Matrix

A.Kageyama, S.Kaneko, N.Shimoyama, M.Tanimoto
Phys.lett.B538(2002)96

Lepton Flavor Violating Process in Degenerate and Inverse-
Hierarchical Neutrino Models

A.Kageyama, S.Kaneko, N.Shimoyama, M.Tanimoto
Phys.lett.B527(2002)206

著者の他の書籍

<紙書籍>

「私、物理は苦手なので... (序)」

デザインエッグ社 ムゲンブックス

<電子書籍>

「色」は実在なのか

～生物が発明した「色」という奇跡の方法～

デザインエッグ社 パプー

中学生・高校生のための数式を使わない物理の本

デザインエッグ社 パプー

ご意見、質問など

akage43-paradox@yahoo.co.jp

までお願いします。(質問には答えられない場合もございますが、可能な範囲でお答えしようと思います。)

ローレンツ収縮の真実～電車とトンネルのパラドックス～ 付録 ローレンツ変換の導出

著 者 蔭山篤司

制 作 Puboo
発行所 デザインエッグ株式会社
