ローレンツ収縮の真実

～電車とトンネルのパラドックス～

―解消編―

蔭山篤司

ローレンツ収縮の真実

～電車とトンネルのパラドックス～

－解消編－

蔭山篤司

2024年

目 次

第1章 相対性理論（特殊相対性理論） 13

1.1 時間の基準、長さの基準 13
1.2 長さ（距離）の測定 14
1.2.1 静止している物体の長さ（距離）の測定 14
1.2.2 動いている物体の長さ（距離）の測定 15
1.3 相対性原理と光速度不変の原理 15
1.4 光速度が不変であるためには 17
1.5 同時刻の相対性 21
1.5.1 「同時」の定義 22
1.5.2 同時刻の相対性（1）定性的な理解 23
1.5.3 同時刻の相対性の向こう側 30
1.5.4 同時刻の相対性のさらに向こう側 35
1.6 時間の遅れ（1）定性的な話 35
1.7 ローレンツ変換 43
1.7.1 ローレンツ変換の意味 45
1.7.2 ローレンツ収縮 47
1.7.3 ローレンツ収縮の別の導出方法 54
1.7.4 同時刻の相対性（2） 56
1.7.5 ローレンツ膨張？ 57
1.7.6 時間の遅れ（2）定量的な話 64
1.7.7 ローレンツ収縮の見え方について 66

第2章 電車とトンネルのパラドックス 69

2.1 電車とトンネルのパラドックス 69

2.2 パラドックスの解消 72

はじめに

「パラドックス」という単語の意味を調べると、色々な意味が出てきますが、この本では「逆説」という意味で使っています。「矛盾」という意味で使われることもあるようですが、この本の中では「矛盾」ではなく、「一見正しくなさそうだけど実は正しい」という意味で「パラドックス」という言葉を使っています。

相対性理論のことを聞いたことがある人もない人も、きっと興味を持ってもらえると思うのでしばらくお付き合い下さい。相対性理論のことを知らないことを前提に話を進めますので安心してください。また、(直線の方程式を学んだ)中学生にも理解できるように説明したいと思います。

トンネルの2倍の長さの電車が光速に近い速さでトンネルを通過するとき、何が起こるでしょうか？相対性理論によれば、光速に近い速さで動く物体を見ると、その物体は進行方向に縮みます。例えば光速の90％程度の速さで走っていれば、トンネルの2倍の長さの電車がトンネルの中にすっぽりと収まってしまいます。これだけでも不思議ですが、更に続きがあります。逆に、電車からトンネルを見ると、電車は止まっていてトンネルが光速に近い速さで電車に近づき、トンネルは電車を通り過ぎて行きます。ということは、電車から見ると、トンネルの長さが縮むはずです。トンネルと一緒に止まってる人から見ると電車が縮んでトンネルにすっぽりと収まっているのに、電車の中の人から

見ると電車より短いトンネルが更に短くなるので電車はトンネルに全く収まっていません。これは一体どういうことなのでしょうか？(図1)

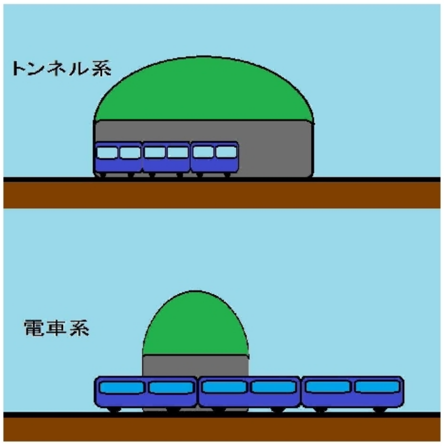

図 1:

はじめに言っておきますが、トンネルから電車を見ると電車が縮み、逆に電車からトンネルを見るとトンネルが縮む、というのは間違いのない事実です。一見、矛盾しているようなこの事実がどのように成り立っているのでしょうか？

この本ではこのパラドックスに焦点を当てて、実際には何が起こっているのかをできるだけ易しく解説しようと思います。そうすることによって、よく知られているローレン

ツ収縮の「意外な側面」も見えてきます。相対性理論のことを聞いたことがある人にはもちろん、聞いたことがない人にもできる限り伝わるように心掛けたいと思います。想像力があれば本質的な部分は難しい知識は必要なく、小学生にも理解できると思います。私が相対性理論に出会ったのは小学校３年生の時に教室の学級文庫にあった一冊の本が最初でした。

マンホールのふたの問題

今から何十年も前のことですが、私が大学院生の頃、とある素粒子理論の宿泊型の研究会が三重県であり、私の研究室のメンバーもそこに参加しました。夜には、お酒を飲みながら素粒子の話題を中心に語り合いました。Ｔ大やＫ大をはじめ、多くの大学の素粒子理論の研究分野の一線で活躍する研究者たちも参加していました。

お酒の場で、ある先生が「『マンホールのふたはマンホールを通過できるか？』っていうのを聞いたことがありますか？」と話し始めました。「マンホールよりも大きなふたが速いスピードで飛んできたとき、ローレンツ収縮で縮むと穴を通過できる。しかし、飛んでいるマンホールのふたから見れば、穴の方がローレンツ収縮を受けて縮んでいるので穴の方が小さくなり、ふたはマンホールを通過できない。どちらが正しいのか？」と問いかけました。（ローレンツ収縮は進行方向に受けるので、運動と垂直方向のふたの直径

は穴の直径と同じ大きさとします。）　ある大学の教授はホワイトボードに時空図を描きながら考えていました。私は私なりの直感的な考えを周りにいた人に話してみましたが、その当時の私の表現力不足でなかなか伝わりませんでした。結局その場ではすっきりした結論が出ないまま、飲み会はお開きになりました。

このときの「マンホールのふた」の問題ではそもそも問題にあいまいな点がいくつかあり、そのためこの問いの本質的な部分以外の点において必要以上に混乱を招いていたと思うので、この本ではこの問題を少しアレンジして問題のポイントとなる点を残しつつ、必要ない部分は削ぎ落した形にしました。マンホールの問題の場合、地面に対して斜めに飛んでくるときの速度の地面に垂直な成分で悩んだり、地面の内部の穴の形状などポイントと異なる部分で悩む人もいました。それらを取り除いて直線状の運動のみで考えられる形として、「電車とトンネル」に置き換えたのがこの本での問題です。

相対性理論は、理系の大学、それも物理学科にでも進まない限り、ほとんどの人はその核心部分を学ぶことはないと思います。たまたま相対性理論に出逢い、興味を持って相対性理論の本を読む人も中にはいると思います。しかし、私はもっと多くの人に触れてもらうべきだと思うし、高校や中学校の授業の中でも触れる機会かあるべきだと思っています。例えば、高校の化学で原子量を学ぶとき相対質量が出てきますが、相対性理論との関わりには触れることは

ほとんどないようです。化学の授業では相対質量の本質的なところには触れないままに教えられている場合が多いようです。

小学生から高校生、あるいはもっと幅広く相対性理論に興味のある大人の方々にまで相対性理論に触れる機会を持っていただきたいというのが私の思いです。

世の中に相対性理論の解説本はあふれていますが、難しいものは小学生から高校生には専門過ぎて途中で挫折してしまうものであったり、易しいものは結果は書いてあるけど、肝心なところは煙にまかれたような気がしてわかった気になれないものが多いと思います。相対性理論とはそういうものだ、と言えば確かにそうかもしれませんが、この本では、相対性理論を専門に勉強するわけではないけど、できるだけ理解したいという人に結果を伝えるだけでなく、理解してもらうことを目指して書きました。実際に高校で物理が苦手な生徒たちに授業を行ってきた経験を踏まえ、できるだけ数式ではなく図と言葉で“理解”してもらえるように心掛けました。しかし、どうしても数式を使わなければならない部分もありました。ただ数式と言っても中学生が学ぶ直線の方程式の知識があれば理解できる範囲だと思います（x-y 平面の中で直線の方程式を書いたり、グラフを読み取ることができれば十分です)。小学生の方でも、全てを理解するのは難しいかもしれませんが、多くの部分を理解できると思います。

1905年にアインシュタインが特殊相対性理論をつくり、そ

の10年後に一般相対性理論をつくり上げました。最初につくられた特殊相対性理論は、それまでの時間と空間の概念を完全に変えてしまうものだったので、当時は理解に苦しむ人は多かったと思います。でも、それを受け入れてしまえば、数学的にはそんなに難しいことは使ってないので、想像力があれば高校生でも十分理解できると思いますし、数学を抜きにしても考え方は小学生でも理解できると思います。一方、一般相対性理論は数学的にもかなり難しい内容なので、理解するには大きな壁があります。しかし、特殊相対性理論の考え方を理解していれば一般相対性理論の考え方も、中学生、高校生であってもある程度理解できると思います。一般相対性理論を使いこなして何かを計算する、とはいかないかもしれませんが。特殊相対性理論にしろ、一般相対性理論にしろ、小学生でも想像力があれば十分わかることはたくさんあり、高校生なら、かなりの部分がわかると思います。（この本においては特殊相対性理論の内容しか触れることはありません。）

是非、日常の常識から離れ、想像力をはたらかせて「思考実験」を楽しみながら読んでいただけたらと思います。

この本における表記法

この本では2つの慣性系が出てきます。慣性系とは「（あまり深く考えず）速度（速さや運動の向き）が変化しない系」のことを言います。これらの慣性系を表す表記法はこ

の本の中で最後まで変わらないので、ここでまとめておきます。一方の慣性系を K 系と呼び、この系の中の位置を x、時間を t で表します。一直線上の運動のみを扱うので空間の3つの方向 (x, y, z) のうち x のみを用い、他の方向は考えません。この K 系に対して一定の速さ v で x 軸の正の向きに運動している系を K' 系と呼び、K' 系の中の位置を x'、時間を t' で表します。x 軸と x' 軸は平行で、正の向きも一致しているとします。

光の速さを c として、$ct = x_0\,, x = x_1$、$ct' = x'_0\,, x' = x'_1$ と表すと、K 系は時間と位置を (x_0, x_1) で表せ、K' 系は時間と位置を (x'_0, x'_1) で表せます。

また、後ほど電車とトンネルが出てきますが、K 系にトンネルがあるとし、トンネルの入り口が x_1 軸の原点 $(x_1 = 0)$ にあるとして、トンネルの長さが L であればトンネルの出口の位置は $x_1 = L$ となります。K' 系に電車があり、電車の最後尾が x'_1 軸の原点 $(x'_1 = 0)$ にあるとします。電車の長さを $2L$（トンネルの2倍の長さ）とすると電車の先頭の位置は $x'_1 = 2L$ となります。$x_0 = x'_0 = 0$ のときに x_1 軸と x'_1 軸の原点が一致 $(x_1 = x'_1 = 0)$ しているとします。（K 系をトンネル系、K' 系を電車系と呼んでいます。）

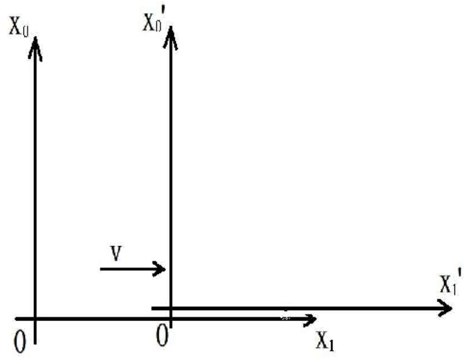

図 2: K 系の x_1 軸に平行な K' 系の x_1' 軸が一定の速さ v で運動しています。

第1章　相対性理論（特殊相対性理論）

読者が相対性理論のことを知らないことを前提に、極力難しい話にならないように話を進めていきたいと思います。ですからある程度相対性理論のことを知っている人は、しばらく飛ばしてもらって本題のところ（第2章 電車とトンネルのパラドックス）から読んでいただいても構いません。そして、もしつまづくところがあればこの章に戻ってきていただければよいと思います。

1.1　時間の基準、長さの基準

この本では互いに一定の速度で動いているそれぞれの2つの系の時間の進み方や、長さの伸び縮みを比較しなければならないので、まずそれぞれの系における時間や長さを測る基準について確認しておきます。

「はじめに」の中の「この本における表記法」で述べたK系（x_1軸）及びK'系（x'_1軸）を考えます。

これらの2つの系において時間や長さを同じ基準で測定しなければ比較することはできません。「相対性原理」（こ

の後1.3節で説明します）からK系とK'系のそれぞれの系にいる観測者にとって、どちらの系も全く区別のない同じ世界でなければなりません。このときどちらの系においても光が1秒間に進む距離は同じなので（この後の1.3節で説明する「光速度不変の原理」です)、これを基準とします。そうすれば、どちらの系も同じ基準で距離（長さ）を測定することができます。そしてこの1秒間、すなわち時間の基準については、それぞれの系において「静止している同じ種類の原子（現在ではセシウム原子を基準としています）が出す光（電磁波）の振動数は正確に同じである」ことを利用します。振動数とは電磁波が1秒間に振動する回数なので、振動する回数を数えて同じであれば同じ時間であることが保証されます。このようにすれば、別々の慣性系においても同じ基準で測った時間と距離を定めることができます。

1.2　長さ（距離）の測定

1.2.1　静止している物体の長さ（距離）の測定

静止している物体の長さを測るにはその物体をx軸に沿って置き、物体の一方の端の位置のx座標ともう一方の端の位置のx座標を測定すれば長さを知ることができます。（当たり前過ぎますが。）

1.2.2 動いている物体の長さ（距離）の測定

動いている物体の長さを測るのも同じように測定すれば長さを知ることができますが、ただし、一方の端の位置を測定するのと他方の端の位置を測定するのは同時でなければいけません。違う時刻でそれぞれの端の位置を測定してもその物体の長さを知ることができないのは理解していただけると思います。その物体の長さを測定しようとしている系において同時に両端の位置を測定しなければならないのです。

1.3 相対性原理と光速度不変の原理

（特殊）相対性理論は「相対性原理」と「光速度不変の原理」を柱に作られています。この「相対性原理」と「光速度不変の原理」から出てくる結果は聞いたことがあるかもしれませんが、「時間の遅れ」や「長さの収縮」などです。この本では、2つの結果が先の2つの原理からどの様に出てくるのかを理解してもらい、タイトルの「電車とトンネルのパラドックス」がどう解消されるのかを理解してもらうことを目指して話していきます。

「相対性原理」は、「全ての物理法則はどの慣性系（一定の速度で運動している系）においても同じ 形の式で表される（同じ物理法則が成り立つ）」というものです。どの慣性系も「区別のない全く同じ世界」と言っても良いでしょう。

ニュートンの運動の法則は全ての慣性系で同じ形で表されており、これは光の速さに比べて十分遅い運動においては物体の運動を正しく表しています。これは「ガリレイの相対性原理」の表れでした。しかし、光に関する法則や、光の速さに近い速さで運動する物体の運動に関する法則についてはガリレイの相対性原理は成り立っていませんでした。これを光速、若しくはそれに近い速さで運動する物体についての法則まで含めて「相対性原理が成り立つべし」と考えたのがアインシュタインで、これを「アインシュタインの相対性原理」と言います。

そして、アインシュタインの相対性原理の根幹となるのが「光速度不変の原理」です。「光速度不変の原理」は、100年以上前から数多くの実験により確かめらている事実なので、これが間違っている、ということはありません。この実験事実を受け入れるところからスタートします。光速度不変とは文字通りですが、どんな速度で動いている人が光の速さを測定しても結果は常に同じ速さになるということ、および光を出す物体（「光源」といいます）がどんな速度で運動していても、そこから出された光を観測すると同じ速さとして観測されるということです。観測者や光源がどんな速度で運動していても「常に光の速さは等しい速さとして観測される」ということです。これが実験により確認されている事実です。

考えてみると、これは我々の常識とは違います。我々の常識では、例えば高速道路で、隣のレーンに同じ向きに走っ

ている車があるとき、隣のレーンの車が時速80キロメートルで、自分の車が同じ向きに時速60キロメートルなら、隣のレーンの車は時速20キロメートルに見えます。自分の車が時速70キロメートルなら隣のレーンの車は時速10キロメートルに見えます。また、自分の車が相手の車と逆向きに時速60キロメートルで走っていれば相手の車は時速140キロメートルに見えます。この様に、見る人の速度によって他の物体の速度が違って見えるというのが、我々の常識です。

この常識が光の場合にはあてはまらず、光源やそれを観測する人がどんな速度で運動していても光の速さは同じで秒速30万キロメートルとして観測されるというのです。これが「光速度が不変である」ということです。

この「光速度が不変である」という実験事実を受け止めるには、今まで正しいと思っていたことを疑い、考え直さなければいけません。ただし、光の速さ（秒速30万キロメートル）に比べて十分遅い我々の日常程度の速度では、やはり先程挙げた車の例のような我々の常識が正しくなくてはいけません。

1.4 光速度が不変であるためには

どんな速度で運動している人に対しても、光の速さが同じであるということは、光が「それぞれの観測者にとって、同じ時間内に同じ距離（秒速30万キロメートル）進む」と

いうことでなければなりません。もう少し具体的な設定で考えましょう。先ほどの K 系と K' 系において、K 系にいるあなたから見て K' 系は x 軸の正の向きに速さ v（例えば秒速20万キロメートル）で動いているとします。

ある瞬間に x 軸と x' 軸の原点が一致していて、その瞬間に原点から x 軸の正の向きに光を出します（ある瞬間に一致した原点から光が出ているので、光がどちらの原点から出たのかは区別できないし、区別する必要もありません）。1秒後、あなたから見て光は30万キロメートル先（$x = 30$ 万キロメートルのところ）まで進んでいます。その時、x' 軸の原点はあなたから見て20万キロメートル（$x = 20$ 万キロメートルのところまで）進んでいるので、常識で考えると K' 系から見れば（K' 系で測れば）x' 軸の原点から x' 軸上の10万キロメートルのところまで光が進んでいるはずだと思ってしまいます（図1.1）。

しかし、これでは K' 系から見た光の速さは秒速10万キロメートルになってしまい、光速度が不変になりません。光速度が不変であるために何を疑わなければならないかというと、K 系から見た K' 系での時間や距離が、K 系での時間や距離（長さ）と一致しているかどうか、ということです。もし、2つの系にお ける時間や距離（長さ）を並べて比べても同じであれば、我々の常識のように、それぞれの系に対して光の速さは異なることになります。我々の常識では、暗黙のうちに K 系と K' 系に1つの同じ時間が流れていて、距離（長さ）を比べても同じである（例えばそれぞれの系

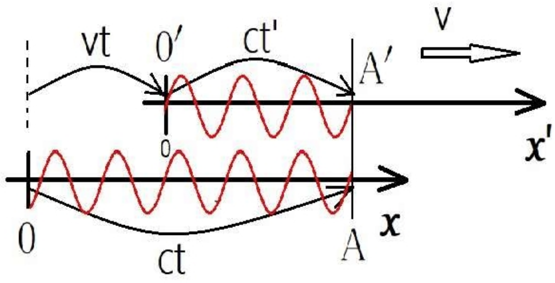

図 1.1:

における「1m」のものを並べて比べれば一致する）と考えていますが、その考えを捨てなければ、光速度不変の原理を受け入れることはできません。今の例の場合（図1.1）、K系では原点から出た光は1秒間に図のOからAまでの30万キロメートル進みましたが、K'系においては$O'A'$が10万キロメートルでもなければA'に光が届いたのが原点を光が出てから1秒後でもないということです。

確かに我々の常識を捨てるのは難しいですが、K系にあなたがいる時と、K'系にあなたがいる時と、どちらの系も区別のない全く同じ世界であることを受け入れればよいのです。あなたがK系にいるとき、光の速さを測定すると秒速30万キロメートルであり、K'系にあなたがいてもK系と全く同様に光の速さが秒速30万キロメートルであるということです。また、その他のどんな物理的な実験をしてもどちらの系においても同じ結果が得られるということです。どちらかが特別なのではなく全く同等であることを受け入れればいいのです。少し言い換えると、**時間の進み方や長さはそれぞれの系いるときには全く同じであるのに、相手の系を見ると（並べて比べると）自分のいる系と同じではない**ということを受け入れなければならないということです。どんな速度で運動している系にいたとしても、光の速さは秒速30万キロメートルと観測され、何一つ差のない同等な世界です。それを受け入れることができれば、相対性理論の入口に入ったと言ってもいいでしょう。ただ少し難しいのは、自分の系から相手の系を見たときに時間や距離

がどう見えるか、ということで、具体的な（定量的な）話をするには数式を使わざるを得ませんが、中学校程度の数学の知識でかなりの範囲を理解できると思いますし、定性的な理解であれば想像力がある小学生にも理解できると思います。

これらの「光速度不変の原理」と「相対性原理」から相対性理論が組み立てられていきます。この本では、この2つの原理を認めてもらい、これらの原理を出発点としますが、それ以外のことは「認めて」ではなくできるだけ「理解」してもらえるようにしたいと思います。

とりあえず「光速度不変の原理」を受け入れて、ここからどんなことが導かれるか見てみましょう。

補足「速さ」と「速度」　高校で学ぶ物理では「向き」と「速さ」を合わせて「速度」と言っています。向きを意識して言うときには「速度」、向きを気にしないでよいときは「速さ」と使い分けていますが、この本ではそんなに気にしなくてもいいです。そして「速さ」は「速度」の大きさです。

1.5 同時刻の相対性

まず光速度不変の原理から出てくる「同時刻の相対性」の話から始めます。我々の常識では、誰かが見て「2つの出来事が同時に起こった」と観測すれば、どんな別の人が見たとしても「同時であると観測するはずだ」と考えると思い

ます。これが光速に近い速さで動いているものには当てはまらないというのが「同時刻の相対性」というものです。

ただしこの「同時刻の相対性」の話をする前に、誤解を生じないように少し補足をしなければならないと思います。

1.5.1　「同時」の定義

「同時なんて定義するまでもないだろう」と思われるかもしれませんが、ここで誤解が生じては話が分からなくなるので確認しておかなければなりません。ある系において離れた2点で起こった出来事が「同時」であるとはどういうことかを定義しておきます。

例えばある系のA点に観測者がいて、A点から離れたP点とQ点で起こった出来事を見るとします。ただし、この系の中ではA点もP点とQ点も静止しているとします。出来事としては、P点とQ点で「花火が光った」でもいいし、P点にいる人とQ点にいる人が「あくびをした」でもいいです。A点からP点までの距離とQ点までの距離が異なればA点に光が届くまでの時間差ができるので例え出来事が「同時」に起こったとしてもA点にいる観測者には同時には見えません。このように「A点にいる観測者にどう見えるか」では同時か同時でないかを判断することはできません。ではどうすればよいかというと、この系全体に全て同じ時刻を示す時計を置きます（今の場合はP点とQ点だけでも良いですが）。P点で出来事が起こった時、P点のすぐそば

にいる観測者が P 点にある時計が示している時刻を記録します。同様に Q 点で出来事が起こった時刻を Q 点のすぐそばにいる観測者が Q 点にある時計が示している時刻を読み取り記録します。この記録された二つの時刻が一致していれば同時刻であり、異なっていれば同時刻ではありません。

このようにある系において、異なる2点で起こった出来事が同時か同時でないかは、この系全体に置かれた同じ時刻を示す時計によりそれぞれの点で出来事が起こった時刻を記録し、それらの時刻を比べることにより判断します。ここで、各点に置かれた全ての時計はその系の中で静止しているとします。このとき、全ての時計が同じ時刻を示すように時計を合わせておく必要がありますが、この方法はアインシュタインが考案した方法によるものとします。この方法は補足に示しておきます。

1.5.2 同時刻の相対性（1）定性的な理解

ある K 系に対して一定の速さ v で動く K' 系の電車があります。この電車の中央から電車の前方と後方に向けて同時に光を出します。そして電車の先頭及び最後尾には光が届くと光るランプを設置しておきます。K' 系の電車の中の観測者が見ても、電車の外で静止している K 系の観測者が見ても光は電車の前方と後方に同じ速さで進んで行きます（光速度不変のため）。

はじめに電車の中の観測者がどう観測するか考えてみま

しょう。電車の中央から先頭までの距離と最後尾までの距離は等しいので、電車の中の観測者（とりあえず電車の中央にいるとします）は電車の先頭と最後尾のランプが同時に点灯するのを観測します。この観測者にとって、「光が電車の先頭と最後尾に到達」するという事象は同時刻です。（観測者が電車内のどこにいてもこの「同時刻」の事実は変わりません。）

先ほど述べたように、電車の中の時計は全て同じ時刻を示すように合わせてあります。つまり、**電車の中の人にとって電車の中全体の時刻は同時刻**です。

電車の中央から出た光は電車の先頭と最後尾に同じ速さで進んでいくので同時刻に届きます。「電車の先頭と最後尾に同時刻に届く」というのは「そう見える」のではなく「届いた時刻を測定（確認）すればそれは同時刻である」ということです。繰り返しになりますが、観測者が先頭にいれば先頭にあるランプから出た光のほうが最後尾にあるランプから出た光より先に届くので、先頭と最後尾のランプが点灯するのが同時には見えませんが、これはここで議論する内容と違う話であり、光が先頭と最後尾に届いた時刻は飽くまで「同時刻」であるということです。これは決定的な違いであり重要なのでこの違いを理解しておいてください。

これを電車の外で静止している K 系の観測者が見るとどう観測するでしょうか？ここで改めて確認しておきますが、電車の外で静止している人が「電車の先頭に光が届く」という出来事と、「電車の最後尾に光が届く」という出来事が

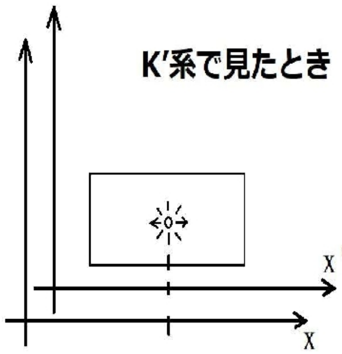

図 1.2:

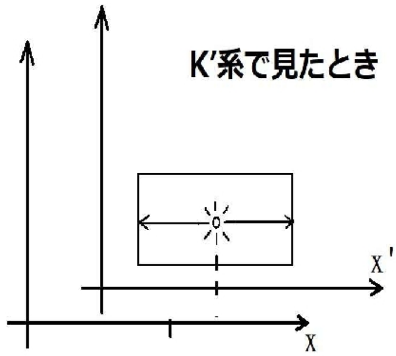

図 1.3: K' 系の電車の中の観測者が観測する時、電車の先頭と最後尾に光は同時に到達します。

起こる時刻を確認するには、電車の外で静止している K 系全体に置いてある同じ時刻を示す時計により判断しなければなりません。電車の中の時計ではありません。電車の先頭に光が届いた瞬間（先頭のランプが点灯した瞬間）、K 系の x 軸上で電車の先頭がある位置における K 系の時計が示す時刻を読み取ります。最後尾に光が届いた時刻（最後尾のランプが点灯した時刻）も K 系の x 軸上で最後尾のランプが光った瞬間に電車の最後尾がある位置における K 系の時計が示す時刻を読み取ります。そしてこの二つの時刻を比べます。この電車の外で静止している K 系の観測者にとっても光は電車の前方と後方に同じ速さで進んで行くことから想像してみてください。電車の先頭は光から遠ざかる向きに動き、後方は光に向かって進みます。すると、**光は電車の最後尾に先に到達し、その後電車の先頭に到達します。**電車の外で静止している人が見たとき、電車の先頭と最後尾に光が到達する時刻は電車の外で静止している人の時刻においては同時ではないのです（図 1.4、1.5）。

この様に、ある観測者にとって同時刻である事象が、ある速度で運動している別の系の観測者にとっては同時刻ではありません。これは単に「見え方が異なる」というのではなく、「同時刻が異なっている」ということです。これを「同時刻の相対性」と言います。

補足　時計の合わせ方　原点から離れた時計の時刻を合わせる方法は、アインシュタインの方法に習って光を用いて行い

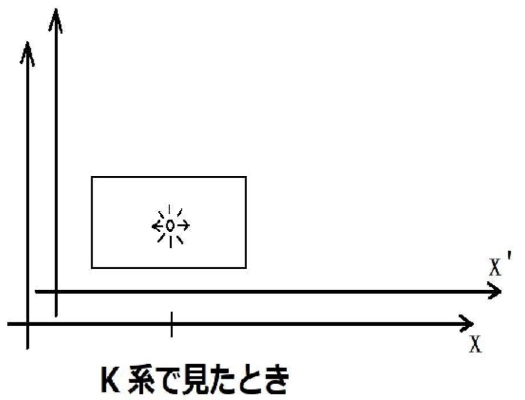

図 1.4: K 系で見たときも、光が出た点から前方と後方に光は同じ速さで進んでいきます。

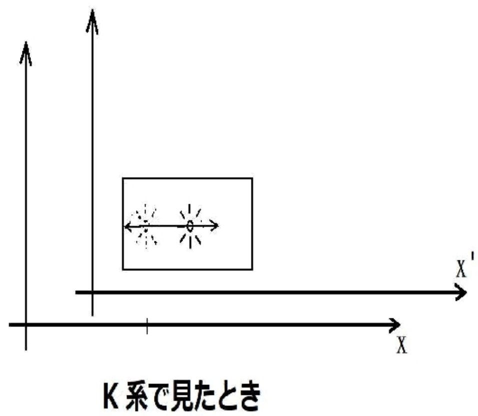

図 1.5: K 系の人が見たとき、K 系の電車の最後尾に光が到達したとき、光は先頭にまだ到達していません

ます。

ある系の原点の時刻を t_1 とします。原点から離れたところで静止している点 P の時計が示す時刻を原点の時計が示す時刻に合わせます。原点の時刻が t_1 のとき、原点から点 P に向けて光を放ち、点 P に光が届いたら点 P で反射して原点に戻ってくるようにします。点 P に光が届いたときに点 P の時計が示している時刻が t_P だったとします。光が原点に戻ってきたときの原点の時刻が t_2 であったとすれば、光が点 P で反射された時の原点の時計が指している時刻は

$$\frac{t_1+t_2}{2}$$

ということになるので、点 P の時刻を

$$\frac{t_1+t_2}{2}-t_P$$

だけ進めてもらえば点 P の時計が指す時刻は原点の時計と同じ時刻になります。

1.5.3 同時刻の相対性の向こう側

K' 系における同時刻が K 系から見ると同時刻でないとはどういうことかもう少し考えてみましょう。K' 系の電車の中の x' 軸に沿って時計がずらりと並んでいるとします（図1.6)。K' 系の人にとってこれらの時計は全て同じ時刻を示しています（そのように時計の時刻を合わせてあるとします)。電車の中の人が観測する時、この電車の中央から出た

光が電車の先頭と最後尾に届く時刻は同時刻で光が届いた瞬間の時計が示している時刻はもちろん同じ時刻です。

これを電車の外で静止している人が見たときどうなるか考えてみましょう。静止している K 系の x 軸上の各点に観測者がいて、電車内の時計を観測します。最後尾に光が届いたとき、先頭にはまだ光が届いていないので、電車内の先頭の時計は最後尾の時計より前の時刻（遅れた時刻）を示しているはずです。もちろん電車内の人にとっては電車内はいつでも同時刻です。何が起こっているかというと、K 系の観測者は「電車の最後尾の時刻より、もっと前の時刻の（過去の）先頭の姿を見ている」ということです。

これをもう少し拡張して考えてみましょう。

図1.6のように電車の中の x' 軸上に $O, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots$ とおきます。先ほど説明したように、光が点 O から出たとすると K 系の観測者が見るとき A_1 に先に光が届き、そのあと B_1 に光が届くので、K 系の観測者が電車内の時計を（K 系において“同時に”）見ると A_1 の時計より B_1 の時計の方が遅れていると観測します。次に A_1 から光が前後に出たとして同じように考えると、A_2 より O の時計が遅れていると観測します。同じようにこれを繰り返せば、K 系の観測者が電車内の時計を観測するとき、電車の後方の時計ほど進んだ時刻を示していて、より前方の時計ほどより遅れた時刻を示していることがわかります（図 1.7）。1つ注意していただきたいのは、今の場合時計が進んでいるか遅れているかは、電車内の時計で比較したもので、K 系の時計と

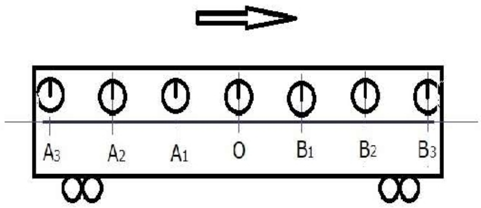

図 1.6:

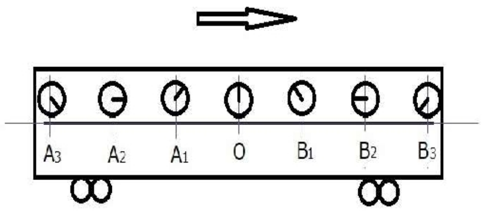

図 1.7: K 系から K' 系の電車内の時計を見ると電車の先頭に近い時計ほど遅れた時刻になっており、後方ほど進んだ時刻になっています。

比べてどうなのかは分かっていないということです。とにかく、K 系の観測者が電車内の時計を見ると、どれ1つとして同じ時刻を示している時計はなく、前方から後方へ向かうにつれどんどん進んだ時刻を示している、ということです。K 系の観測者は、電車の前方ほど過去の電車の姿を（遅れた時刻の姿を）、後方ほど未来の電車の姿を（進んだ時刻の姿を）見ているということです。これは実は K' 系の x' 軸が K 系の x 軸に対して時間の方向に傾いていることを示しています（1.7 ローレンツ変換）。

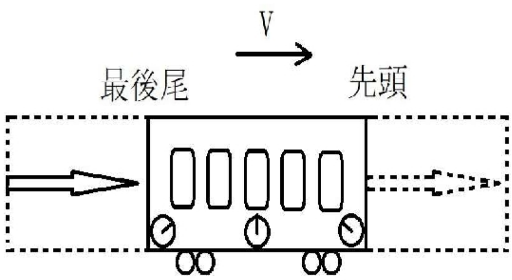

図 1.8:

1.5.4 同時刻の相対性のさらに向こう側

前節で見たように、前方ほど電車の過去の姿、後方ほど電車の未来の姿を見てるとしたら、何が起こるでしょうか?電車の中央の時計の時刻を基準としたとき、その基準の時刻より前の時刻において先頭があった位置にいる時の姿、すなわち電車の先頭がより手前の位置にあったときの先頭の姿であり、電車の最後尾の未来の姿とは電車の中央の時計の時刻より後の時刻において最後尾が到達する位置にある時の姿、すなわち電車がより前方に移動している時の最後尾の姿である、ということです。K 系の同時刻で見たとき、電車の前方は後方にいたときの、後方は前方に進んだときの姿を見ているということは電車が K 系の中で全体として縮んでいる、ということを意味しています。

少し補足しておくと、今の話で電車の前方と後方が電車の中央に向かって縮んだかのように思われたかもしれませんが、それは飽くまで電車の中央の時計の時刻を基準としたからであり、別の位置の時計を基準とするとその点に向かって前後が縮んでいます。どこかに縮む中心があるのではなくどの点も区別がない対等な点です。

1.6 時間の遅れ（1）定性的な話

相対性理論から導かれるもう一つの重要な事実に、「時間がゆっくり進む」というものがあります。これは、やはり「光速度不変」から自動的に導かれる事実です。

先ほどと同様に2つの慣性系K系とK'系を考えます。K'系はK系のx軸の正の向きに一定の速度で運動しているとし、K'系にあるロケットを考えます（電車が突然ロケットになりましたが、これは単に以前作成した絵の再利用のためです）。K'系のロケットの1つの側面から、進行方向に垂直な方向に光を出します。そしてその向かいの側面にある鏡で反射して元の位置に光が戻ってくるとします。ロケットの中の人が見ると、光はロケットの側面と側面の間を一往復します。ロケットの中の人が見たときには、単に止まっているロケットの中の側面と側面の間を光が一往復しただけです（図1.9、1.10）。光は、光が出た位置にまた戻ってきています。ロケットの幅をLとすると、ロケットの中の人が見ると光が進んだ距離は$2L$です。

次にこの同じ事象をK系のあなたから見るとどう見えるか想像してみましょう。あなたから見るとロケットはx軸の正の向きに一定の速度で進んでいます。すると、1つの側面から出た光は（鏡で反射しなければならないので）K系のx軸に対して斜めに進み、向かいの側面の鏡で反射され、また斜めに進んで元の側面に戻ります。あなたから見た光が進んだ経路はロケットの側面と側面の間の一往復の距離（$2L$）より長くなっているのがわかると思います（図1.11、1.12）。ここで重要なのは、「光速度不変の原理」から、どちらの系においても光の速さは同じであるということです。例えば、ロケットの中の人が測って光が一往復するのに1秒かかったとします（つまり、光が$2L$進むのに1秒かかる）。

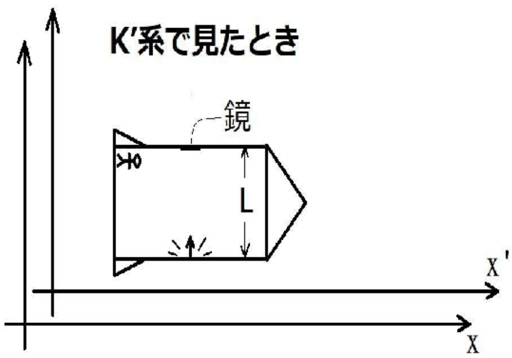

図 1.9:

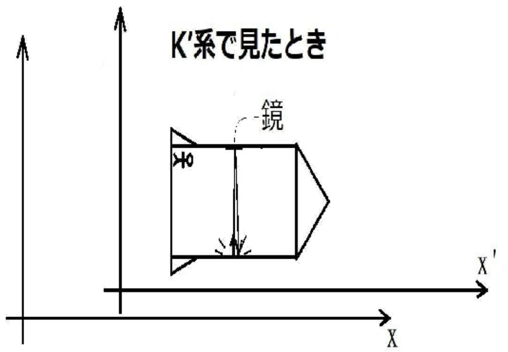

図 1.10:

この一往復の時間をあなたが測定すると、光が進んだ距離が $2L$ より長いので、1秒より長くなります。これはどういうことかというと、ロケットの中で1秒経過したとき、K 系では1秒より長い時間が経過している、ということです。ロケットの中の人にとって1秒経過したとき（つまり光が1往復したとき）、K 系では1往復が $2L$ より長いため、K 系では1秒より長い時間が経過しています。ロケットの中の人にとっても、静止しているあなたにとっても光は全く同じ速さで進んでいるので、この様な結果になります。K 系にいるあなたから見るとロケットの中の時間は、あなたの時間よりゆっくり進むということです。

ここで立場を変えて今度は K 系において x 軸に垂直な方向に光源と鏡を距離 L だけ離して置き、光を1往復させます。これを K' 系のロケットから見ると同様にやはり相手の K 系の時間がゆっくり進んでいると観測します。K 系と K' 系のどちらの立場も全く対等で、お互いに相手の系の時間がゆっくり進んでいると観測するのです。

Puzzle 1「時間の遅れ」のパラドックス？ 先ほど、「静止している系から動いている系の時間の進み方を見るとゆっくり進んでいると観測される」と話しました。そしてこれは立場を逆にしても同じことが言え、動いている系から静止している系に設置された時計の時間の進み方を観測しても同様にゆっくり進んでいると観測します。（一定の速度で）動いているか静止しているかはどちらの立場で見るかだけの違

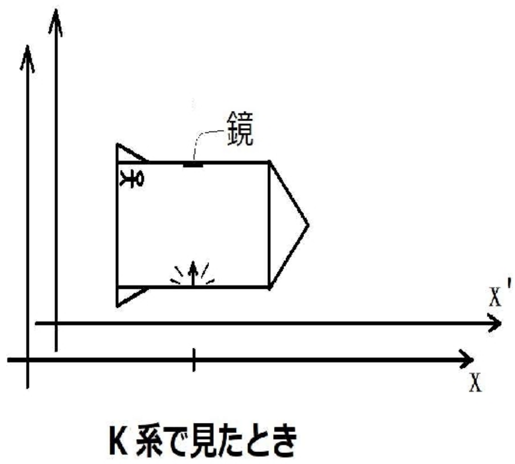

図 1.11:

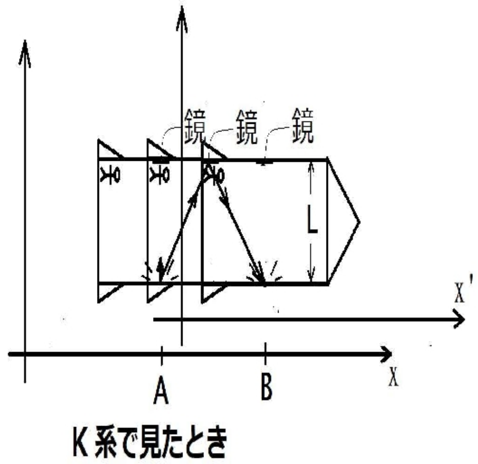

図 1.12:

いで全く対等なので、お互いに相手の時間がゆっくり進んでいると観測するのは最初に話した「相対性原理」にも矛盾していません。

では、こういうことを考えてみたらどうなるでしょうか？先ほどと同様にロケットの中で壁と壁の間を光が一往復します。先ほどと同様にロケットの中で測ってこれが1秒とします。この時ロケットの中でストップウォッチで測っていたら、光が一往復したときストップウォッチは1秒を指しています。この一往復をロケットの外で静止している人が測ることを考えてみます。先ほどの話では1秒より長くかかるということでした。そこで、静止している系（K系）の観測者がロケットの中を観測していて、光が放たれた瞬間の時刻をK系の時計で測定し、そして光が一往復したときの時刻もK系の時計で測定します。この静止しているK系の人が測定している時計は1秒より長い時間進んでいます。このK系の人が持っている時計をロケットの中の人が確認したらどうなるでしょうか？ロケットの中で光が放たれた時の静止系（K系）の時計が示す時刻と、光が一往復したときの静止系（K系）の時計が示す時刻を確認すると、1秒を過ぎた時刻を示しているはずです。つまり、ロケットの中で1秒経過した時にロケットの外（K系）の時計を見ると1秒以上の時間が経過している（時計の針が1秒以上進んでいる）ことになります。ということは、ロケットの中の人が見たとき、静止系の人が測っている時計のほうがより速く進んでいることになるのではないでしょうか？これで

は先ほどの相手の系の時間がよりゆっくり進むということと逆の結果になってしまいます。

これはどういうことなのでしょうか?この考えのどこが正しくないのか考えてみてください[1]。

1.7 ローレンツ変換

ここで少し具体的な（定量的な）話に踏み込むために数式を使ってみます。ただし中学校で学んだ範囲なので、中学生でもほぼ理解できると思います。

2つの慣性系があり、一方をK系とし、時間と位置を(t,x)で表し、他方をK'系とし、(t',x')で表します。x軸とx'軸は平行で、K系から見てK'系のx'軸はx軸の正の向きに速さvで移動しおり、光速をcとします。$t=t'=0$のとき、二つの系の原点が一致（$x=x'=0$）していたとします。（「はじめに」の中で示した設定と同じです。）

ここで光速度不変の原理が成り立つことから導かれるK系とK'系の間の位置（xとx'）と時間（tとt'）の間で成り立つ関係を求めます。この結果は「ローレンツ変換」と呼ばれています。

光速度不変の原理より、どちらの系においても光の速さは同じであり、$x=ct,\ x'=ct'$なので

$$x^2-(ct)^2=0=(x')^2-(ct')^2 \tag{1.1}$$

[1]ヒント：光が放たれた時刻を測定するK系の時計と、光が戻ってきた時刻を測定するK系の時計がそれぞれどこにあるか考えてみましょう。（例えば図1.12でいうと、K系のx軸上の点Aと点Bになります。）

が成り立っています。このとき、K系とK'系の間に、

$$x' = A(x - vt),\ t' = Bx + Dt \tag{1.2}$$

の関係が成り立っているとして、定数係数A、B、Dを求めます。（1.1）式に（1.2）式を代入して係数を比較することにより求めることができます。（この係数は一方の系から他方の系を見たとき、時間や距離（長さ）が何倍になっているかを表すことになります。）

計算の結果は、$\beta = \dfrac{v}{c} < 1$として[2]

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ B &= -\frac{\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ D &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}$$

が求まります。ここで$ct = x_0$, $ct' = x'_0$, $x = x_1$, $x' = x'_1$として、上の結果を代入して(1.2)式を書き直すと

$$K\text{系}:(ct\,,x) = (x_0\,,x_1)\,,K'\text{系}:(ct'\,,x') = (x'_0\,,x'_1)\,,$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.3}$$

$$x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.4}$$

[2] vがcを超えることはできません。

という関係が成り立っていることがわかります。この関係をローレンツ変換と言います。

この結果を利用して K 系の観測者が見た時の K' 系の x_0' 軸及び x_1' 軸を K 系の x_0-x_1 平面に描いてみましょう。まず x_0' 軸は $x_1' = 0$ となる直線なので (1.3) において

$$0 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

より、

$$x_0 = \frac{1}{\beta} x_1 \qquad (1.5)$$

であり、x_1' 軸は $x_0' = 0$ となる直線なので (1.4) 式より

$$0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

であるから、

$$x_0 = \beta x_1$$

となります（図 1.13)。

x_0-x_1 平面に光が描く直線を描いてみると $ct = x$ すなわち $x_0 = x_1$ となります。v が c に近いほど x_0' 軸も x_1' 軸も直線 $x_0 = x_1$ に近づきます。

1.7.1 ローレンツ変換の意味

ここでローレンツ変換 (1.3) 式及び (1.4) 式が表す意味を時空図の中で考えてみましょう。時空図の中に点 P を描き

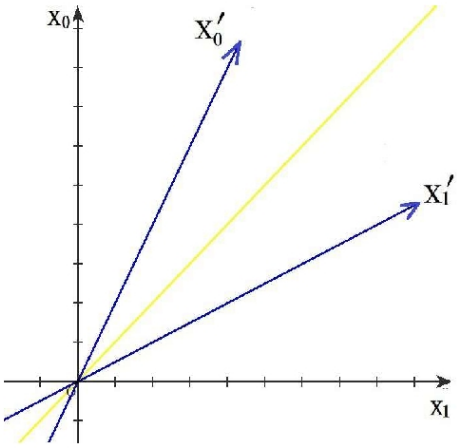

図 1.13: x_0-x_1 平面と x_0'-x_1' 平面

ます。どこでもいいです。点PをK系で見たときの座標を$(x_0(P), x_1(P))$と表し、同じ点をK'系で見たときの座標を$(x_0'(P), x_1'(P))$と表します（図1.14）。これらの座標どうしを結びつけるのがローレンツ変換です。つまり、時空内の点を一方の系で見たときの座標を他方の系で見たときの座標に直す（変換する）のがローレンツ変換です。

$$\begin{aligned} x_0'(P) &= \frac{x_0(P) - \beta x_1(P)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_1'(P) &= \frac{x_1(P) - \beta x_0(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}$$

1.7.2 ローレンツ収縮

ここでは前の節「同時刻の相対性」でみた、K'系の中での長さがK系の中では短くなっている、ということを少し定量的に確認してみます。ローレンツ変換の結果を用いてK'系のx_1'軸上に固定された2点P, Q間の距離（$= \overline{PQ}$）がK系ではどう見えるかを求めてみましょう（図1.15）。点Pと点Qのx_1'軸上の座標を先ほどの表し方のようにそれぞれ$x_1'(P), x_1'(Q)$と表します（$x_1'(P) < x_1'(Q)$とします）。K'系での2点の距離はK'系において同時刻の2点の距離で、この距離をLとしましょう（これはK'系の人が測定した距離です)。

$$\overline{PQ} = L = x_1'(Q) - x_1'(P).$$

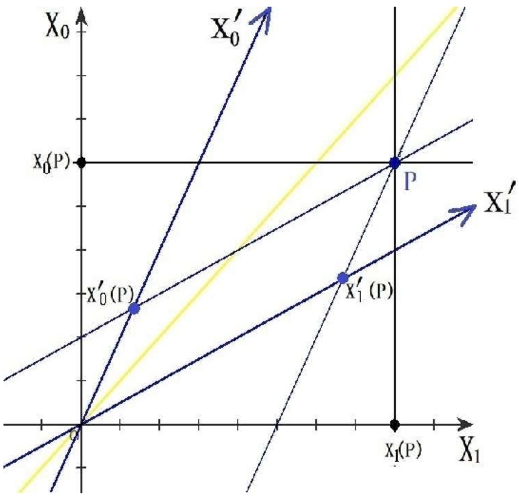

図 1.14: 時空内の点 P の K 系における座標と K' 系における座標

x'_1 軸上の 2 点 P,Q が K' 系で静止しているので、2 点は時間の経過とともに時空図の中で x'_0 軸に平行な直線を描きます（図 1.15)。これを点 P や点 Q の**世界線**と呼びます。この 2 点 P,Q を K 系で見るということは、K 系におけるある一つの時刻で点 P と点 Q を同時に見るということなので x_1 軸に平行な直線と点 P と点 Q の世界線の交点 P_1、Q_1 の x_1 座標 $x_1(P_1)$ 及び $x_1(Q_1)$ を読みとり、その間隔が K 系における 2 点の距離（長さ）ということになります（図 1.15)。

はじめに、K 系で見たときの点 $P(x'_0(P), x'_1(P)) = (0, x'_1(P))$ と点 $Q(x'_0(Q), x'_1(Q)) = (0, x'_1(Q))$ の世界線を求めましょう。点 P の世界線は、点 P を通り x'_0 軸（(1.5) 式）に平行な直線なので、K 系の x_0, x_1 で表すと b を定数として、

$$x_0 = \frac{1}{\beta}x_1 + b \qquad (1.6)$$

と表すことができます。点 P の K 系における座標 $(x_0(P),\, x_1(P))$ を求め（$x_0(P), x_1(P)$ を $x'_0(P), x'_1(P)$ で表し)、(1.6) 式に代入し、b を求めましょう（b を $x'_0(P)$ と $x'_1(P)$ で表します)。ローレンツ変換の式 (1.3)、(1.4) より

$$x'_1(P) = \frac{x_1(P) - \beta x_0(P)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.7)$$

$$x'_0(P) = \frac{x_0(P) - \beta x_1(P)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.8)$$

において、点 P は x'_1 軸上の点なので $x'_0(P) = 0$ であり、

(1.8) 式は

$$0=\frac{x_0(P)-\beta x_1(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

よって

$$x_0(P)=\beta x_1(P)$$

これを (1.7) に代入し、

$$x_1'(P)=\frac{\left(1-\beta^2\right)x_1(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sqrt{1-\beta^2}x_1(P)$$

であり、

$$x_1(P)=\frac{x_1'(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となります。$x_0(P)$ は

$$x_0(P)=\beta x_1(P)=\beta\frac{x_1'(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

これらを (1.6) 式に代入し b を求めます。

$$\beta\frac{x_1'(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\beta}\frac{x_1'(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}+b$$

よって

$$\begin{aligned}-b &= \frac{1}{\beta}\frac{x_1'(P)}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\beta^2\right)\\ &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}x_1'(P)\end{aligned}$$

となり、bが求まります。直線（Pの世界線）は

$$x_0 = \frac{1}{\beta}x_1 - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}x_1'(P)$$

となります。この直線とK系のx_1軸との交点（点P_1とします）は$x_0 = 0$とおいて

$$0 = \frac{1}{\beta}x_1(P_1) - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}x_1'(P)$$

よって

$$x_1(P_1) = \sqrt{1-\beta^2}x_1'(P)$$

となります。同様に点Qの世界線とx_1軸との交点（点Q_1とします）を求めると

$$x_1(Q_1) = \sqrt{1-\beta^2}x_1'(Q)$$

となります。これでK系における点Pと点Qの距離$\overline{P_1Q_1}$を求めることができます：

$$\begin{aligned}
\overline{P_1Q_1} &= x_1(Q_1) - x_1(P_1) \\
&= \sqrt{1-\beta^2}\,(x_1'(Q) - x_1'(P)) \\
&= \sqrt{1-\beta^2}\,\overline{PQ} = \sqrt{1-\beta^2}L
\end{aligned}$$

となり、K'系での長さより$\sqrt{1-\beta^2}$倍に短くなっていることが分かります。βが1に近いほど、すなわちvが光速cに近ければ近いほどK系の同時刻の中ではK'系の中での長さより短くなっている、ということを意味しています。こ

れは、単にこれだけ短く「見えている」というだけでなく、「K系の同時刻の世界の中でこの長さで存在している」ということを意味しています。これを時空図の中で見てみましょう。図1.15の$\overline{P_1Q_1}$がK系で見たときのPQの長さで、$\overline{PQ}$がK'系で見たときのPQの長さです。

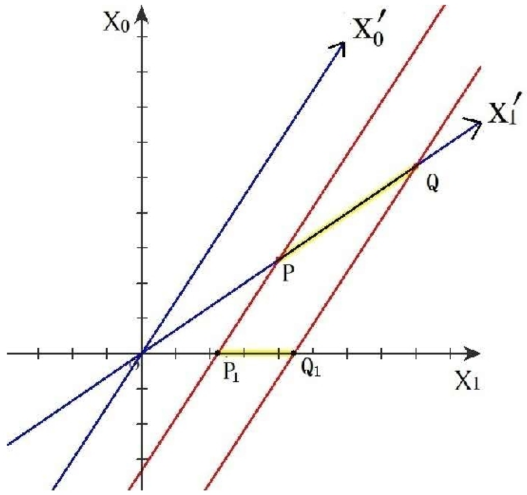

図 1.15: 赤い直線が点Pと点Qの世界線です。図の線分PQはK'系の長さLの線分で、線分P_1Q_1はK系で見た線分PQの長さになります。

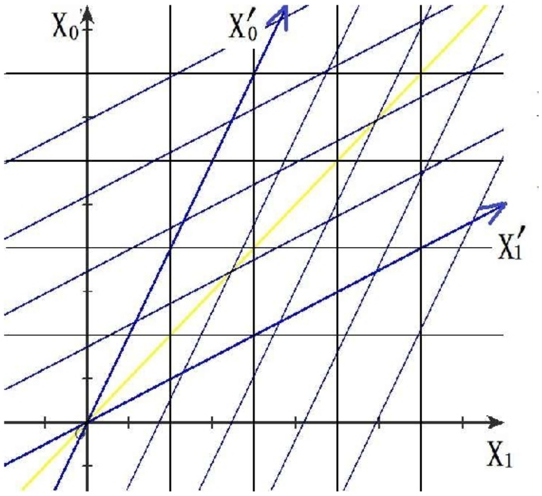

図 1.16: 時空内の各点は K 系における座標と K' 系における座標の両方で表すことができます

1.7.3 ローレンツ収縮の別の導出方法

図1.17を見ながらローレンツ収縮を別の方法で求めてみましょう。点Pの世界線上で、K系においてQと同時刻の点をP_2とします。このとき$x_0(P_2) = x_0(Q)$です。K系で見たPQの長さは$\overline{P_2Q}$であり、

$$\begin{aligned}
L &= \overline{PQ} = x_1'(Q) - x_1'(P) \\
&= x_1'(Q) - x_1'(P_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\{x_1(Q) - \beta x_0(Q) - \{x_1(P_2) - \beta x_0(P_2)\}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\{x_1(Q) - x_1(P_2)\} = \frac{\overline{P_2Q}}{\sqrt{1-\beta^2}},
\end{aligned}$$

よって

$$\overline{P_2Q} = \sqrt{1-\beta^2}L.$$

ここで1行目から2行目への変形において点P_2は点Pの世界線上の点なので$x_1'(P_2) = x_1'(P)$であることを用いました。また2行目から3行目では点Qと点P_2に対するローレンツ変換の式(1.7)式を用い、3行目から4行目の変形において$x_0(P_2) = x_0(Q)$を用いました:

$$x_1'(Q) = \frac{x_1(Q) - \beta x_0(Q)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.7}$$

$$x_1'(P_2) = \frac{x_1(P_2) - \beta x_0(P_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.7}$$

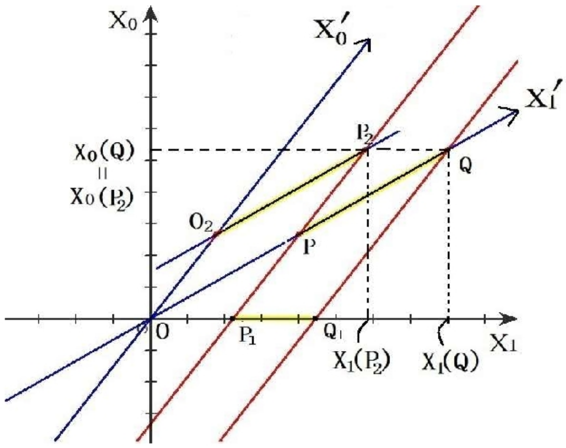

図 1.17: 線分 OQ から線分 O_2P_2 を引いたものは、線分 O_2P_2 は線分 OP に等しいことから線分 OQ から線分 OP を引いたものに等しいことが分かります。

注　多くの本でこの方法でローレンツ収縮を求めているのを見かけますが、それには少し注意が必要です。注意しなければならないのは、左辺の (x'_0, x'_1) と右辺の (x_0, x_1) が異なる時空点を表している場合にはローレンツ変換の式 (1.3) 式や (1.4) 式を使うことができないということです。ローレンツ変換で K 系での座標と K' 系での座標が結びついていますが、これは飽くまで左辺と右辺で同一の時空点を表している場合の関係です。ただし別の時空点であっても、例えば x'_0 軸に平行な直線上では x'_1 座標の値が同じであることや、x'_1 軸に平行な直線上では、x'_0 座標の値が同じであることを利用することができます。この本での表し方のように時空内のどの点についての関係なのかを明確にしなければ、ローレンツ変換の式の誤った使い方に陥ることがあるので気を付けなければなりません。

1.7.4　同時刻の相対性（2）

同時刻の相対性のところで話しましたが、電車の中の時計は電車の中の人（K' 系の人）にとっては全て同じ時刻を示していますが、電車の外で静止している人（K 系の人）が見ると電車の前方の時計ほど遅れた時刻を示していて、後方の時計ほど進んだ時刻を示していました。これを時空図の中で見てみましょう（図 1.18）。

図の線分 AB が線分 PQ が描く世界面を K 系の時刻 $x_0 = 0$ の断面で見たものになります。点 A から点 B に向かってた

どっていくと、B に近づく程　より K' における過去の姿を見ていることが分かります。

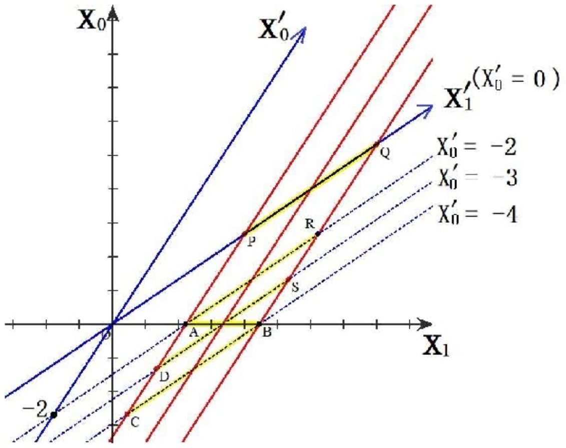

図 1.18: 線分 AB において点 B は $x'_0 = -4$, 点 A は $x'_0 = -2$,AB の中点は $x'_0 = -3$ で、点 A から点 B 向かって B に近いほど K' 系において遅れた時刻の姿になっています。

1.7.5 ローレンツ膨張？

このような時空図を見るときに気を付けなければならないのは、K 系の x_0 軸や x_1 軸の縮尺と K' 系の x'_0 軸や x'_1 軸の縮尺が見た目とは同じではないということです。つまり、

軸上の長さがそのまま見た目の長さにはなっていないということです。これを確認するために K' 系の x_1' 軸上の長さ L の線分と K 系の x_1 軸上の長さ L の線分を時空図の中で比較してみましょう。

K 系の x_1 軸上の長さ L の棒と同じ長さの x_1' 軸上の長さ L の棒の両端の座標の値が K 系でどうなるのか、時空図で見てみましょう。ここでは計算が簡単になるように先ほどの x_1' 軸上の点 P を原点 O に、点 Q を点 A として、K 系で見た線分 OA を考えます（図1.19)。$x_0 = x_0' = 0$ のとき、x_1 軸と x_1' 軸の原点が一致しています。このとき、時空内の点 A の K 系における座標と K' 系における座標を求めて比べてみましょう。K' 系の長さ L の棒の両端の座標は $(x_0', x_1') = (0, x_1'(A)) = (0, L)$ です。一方、K 系の x_1 軸上の長さ L の棒の両端（図1.19の点Oと点B）の K 系における座標を $(x_0, x_1) = (0, x_1(B)) = (0, L)$ とします。

ここで $\overline{OB} = \overline{OA} = L$ です。(1.7) 式、(1.8) 式において

$$x_1'(A) = L,\, x_0'(O) = x_0'(A) = 0 \tag{1.9}$$

であることを用いて、時空内の点 A の K 系での座標 $(x_0(A), x_1(A))$ を求めましょう。

$$\begin{aligned} x_1'(A) = L &= \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_1(A) - \beta x_0(A)}{\sqrt{1-\beta^2}} & (a) \\ x_0'(A) = 0 &= \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_0(A) - \beta x_1(A)}{\sqrt{1-\beta^2}} & (b) \end{aligned}$$

(b) 式より

$$x_0(A) = \beta x_1(A)$$

これを (a) 式に代入すると

$$\begin{aligned} x'_1(A) = L &= \frac{x_1(A) - \beta^2 x_1(A)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} x_1(A) \\ &= \sqrt{1-\beta^2}\, x_1(A) \\ x_1(A) &= \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} \, (> L) \end{aligned}$$

これから $x_0(A)$ の値も求まります（図 1.19）

$$x_0(A) = \frac{\beta L}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

この結果を見ると、何かおかしい気がするのではないでしょうか。前の節で相手が自分に対して動いているとき、ローレンツ収縮により長さが縮むと言っていたのが「伸びるの？」と思われている方もいると思います。

$x'_1(A) = L$ の点を K 系で見ると、x_1 座標が

$$x_1(A) = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} > L$$

であり、K' 系の長さ L が K 系から見ると L より長くなって

いる様な気がします（図1.19）。例として$\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$の場合と$\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$の場合の図を示しておきます（図1.20, 1.21）。

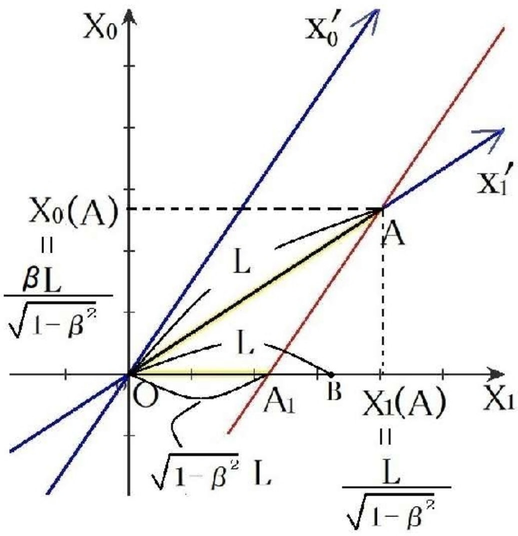

図 1.19:

この結果自身は間違ったものではなく正しいです。確かに、K'系の線分OAのOはK系のx軸上の原点にあり、A

の x_1 座標は L より大きな位置にあります。

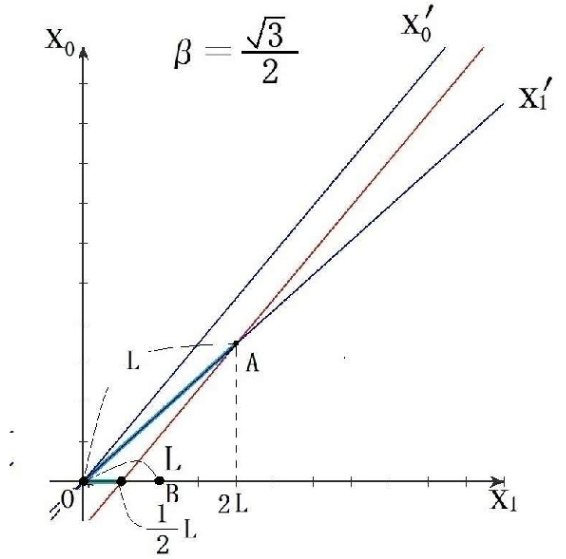

図 1.20:

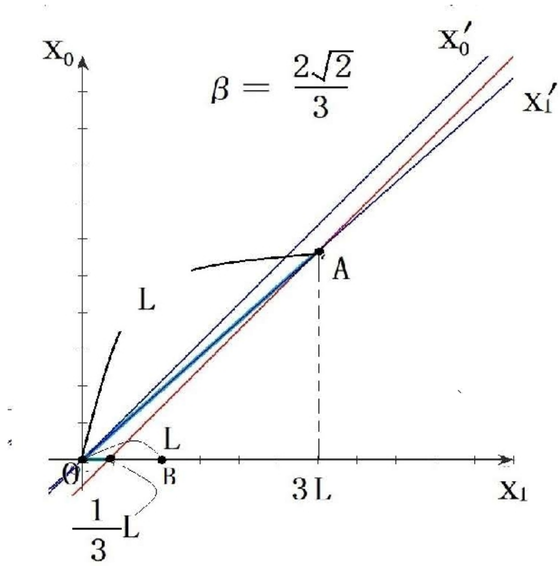

図 1.21:

ただし、時空内の点Oと点AはK'系では同時刻の点ですが、K系では同時刻の世界の中にはなく点AはK系において点Oより未来の位置にあり、点Oより少し遅れて見ることになります。すなわち、点Oと点AをK系の中では同時に見ることができません。

例えばK系では、$\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$であれば

$$x_1(A) = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = 2L,$$

$\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$であれば

$$x_1(A) = 3L$$

となります。K'系の同時刻の長さLの棒の両端の座標がK系の時間を超えてK系の距離$2L$や$3L$の距離をまたいでいるのです。

先ほど述べたように、K系におけるK'系での線分OAの長さ（2点の距離）は「K'系のx'軸の原点Oと点$A(x_1'(A) = L)$の2点を結ぶ線分が描く世界線（面）とK系の同時刻を表す直線（x_1軸またはx_1軸に平行な直線）との交わりを見る」ということです（図1.19）。そこで点Aの世界線を求めてみましょう。先ほどと同様に点Aを通り、傾きがx_0'軸に平行な直線を求めます。この直線を

$$x_0 = \frac{1}{\beta}x_1 + b$$

として、先程求めた K 系における点 A の座標 $x_0(A)$, $x_1(A)$ の値は

$$x_1 = x_1(A) = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

及び

$$x_0 = x_0(A) = \frac{\beta L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

であり、これを直線の式に代入し b が求まり、

$$x_0 = \frac{1}{\beta}x_1 - \frac{L\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

となります。この直線と x_1 軸との交点（これを点 A_1 とおきます）は $x_0 = 0$ とおいて

$$x_1(A_1) = \overline{OA_1} = L\sqrt{1-\beta^2}$$

であるので、やはり K 系にいる観測者が K' 系における長さ L の棒を見ると $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍に短くなっています（図1.19,1.20,1.21）。

1.7.6 時間の遅れ（2）定量的な話

ローレンツ変換の式を手に入れたので、K 系から見た時の K' 系にある時計の進み方の遅れについて見てみましょう。（これは逆に K' 系から K 系に置かれた時計を見た場合も同じことが言えます。）

K' 系の原点に置かれた時計は x'_0 軸上を時間の経過とともに移動していきます。K' 系において時間が T 経過したと

き、時計は図 1.22 の点 R の位置にあります。K' 系で時刻 $x_0'(R) = T$ を指している時計を K 系で見た（測定した）ときの K 系における時計の時刻は図の R 点の x_0 座標 $(x_0(R))$ より

$$x_0(R) = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

です[3]。つまり K 系では $x_0(R) = \dfrac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$ だけ時間が経過しています。このとき

$$T < \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

であり、K' 系にある時計を K 系から見ると K 系の時計よりゆっくり進んでいることが分かります（逆に K 系の時計の方が進んでいる、と言ってもよいでしょう）。これは「ローレンツ膨張？」のところで見たように点 P の x_1 座標が大きくなっていたのと同じ理由で点 R の x_0 座標が大きくなっており時間が伸びているように見えています。この意味において時間と空間は対等です。

時空の中で起こっていることは時間と空間は対等ですが、「ローレンツ収縮」では長さが短くなっているのに時間がゆっくり進む（伸びている）のを「あれ？」と思うかもしれませんが、これは見ていることが異なるからです。ローレンツ収縮では異なる 2 点の位置を同時刻で測定しており、時間

[3] R は x_0' 軸上の点なので $x_1'(R) = 0$ であり、(1.7) 式より $x_1(R) = \beta x_0(R)$ となり、これを (1.8) 式に代入するとこの結果が得られます。

の遅れは K' 系の原点に置かれた1つの時計を追いかけ、その一点の座標（x_0 座標）を読み取っています。これは「ローレンツ膨張？」で棒の一端の x_1 座標を読み取ったのと同じです。時空図（図1.22）を見ると、時間軸と空間軸の伸びが対等であることが分かります。

1.7.7 ローレンツ収縮の見え方について

ロジャー・ペンローズが指摘しているように、長さと幅のある物体であれば本来まだ見えていない物体の側面も見え、（回転したような）少し斜めに潰れた形に見えるのは確かでしょう（図1.23）。しかし、この本で議論するのは「どう見えるか」ではなくそれぞれの系の中で「どこに存在しているのか」です。この違いを意識しながら読んでいただきたいと思います。「見える」というのは「**ある系の一人の観測者に相手の系の物体がどう見えるか**」、ですが「（ある系の中で）どこに存在しているのか」というのは「（どう見えるかとは無関係で）相手の系の物体が時空の中のどこ（時間、位置）に存在するか」ということです。

これは、相手の系（K' 系）の物体の各点（各部分）が別の系（K 系）の x 軸上のあらゆる点にいる無数の同時刻の観測者によって（K 系の）x 軸上のどこにあると観測されるのか、ということです。

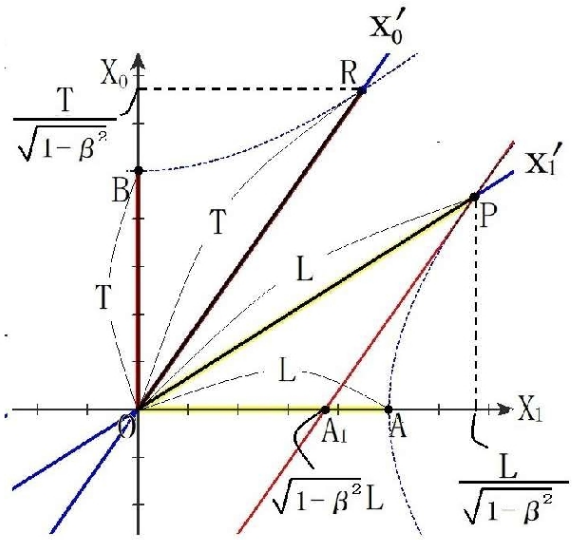

図 1.22: 点 P の x_1 座標は L より大きな値ですが、A_1 の x_1 座標は L よりも小さな値になっています（ローレンツ収縮）。点 R の x_0 座標は T よりも大きな値になっています。これは K 系から見た K' 系の時計がゆっくり進んでいることを示しています。

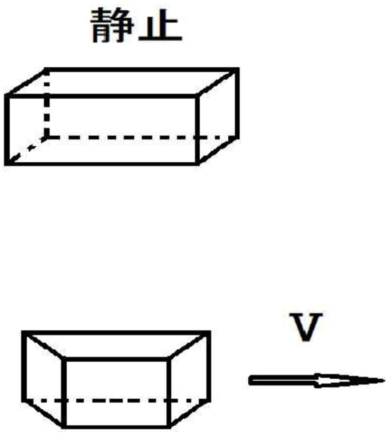

図 1.23: この図は形としては正確なものではありませんが、本来見えない部分が見えているということを示しています。

第2章　電車とトンネルのパラドックス

2.1　電車とトンネルのパラドックス

ここでようやく、この本の主題について考えてみます。そこで、具体的な状況を設定してみましょう。「走っている電車がトンネルを通過する場合」において、これまでお話してきたことを考えてみましょう。

トンネル（長さ L とします）より長い電車（長さ $2L$、トンネルの2倍とします）が光速に近い速さでトンネルを通過するとどうなるでしょうか？

トンネルとともに静止している系を「トンネル系」と呼び、電車とともに光速に近い速さで運動している系を「電車系」と呼ぶことにします。

前の章で、静止している系（トンネル系）から光速に近い速さで運動している系（電車系）にあるものの長さを見ると $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍に縮んでいることが分かりました。この時 $\beta\left(=\dfrac{v}{c}\right)$ が1に近いほど、すなわち運動している物体の速さ v が c に近いほど短く縮みます。

ここで立場を変えて観測者が K' 系（電車系）にいて、K

系にあるトンネルを見るとどうなるでしょうか？K'系（電車系）にいれば電車は止まっていてトンネルが光速に近い速さで動いています。すると電車からトンネルを見れば、トンネルの長さが$\sqrt{1-\beta^2}$倍に縮むことになります。

ここで計算が簡単になるように

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86\cdots \qquad \text{及び} \qquad \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.94\cdots$$

の場合を考えましょう。このとき

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\beta^2} &= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\beta^2} &= \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

なので、このときローレンツ収縮により相手の系にあるものの長さが2分の1倍あるいは3分の1倍になります。

トンネル系から電車を見ると電車の長さは$2L \times \frac{1}{2} = L$となり、ぴったりトンネルの中に収まります。$\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$であ

れば電車の長さは $\frac{2}{3}L$ となり十分にトンネルよりも短くなります。この場合、電車がトンネル内にある時に出口と入口の扉を「同時に」閉じて、電車をトンネル内に閉じ込めることができます。ほんの一瞬ですが。

一方、電車系からトンネルを見るとトンネルの長さは $L \times \frac{1}{2} = \frac{L}{2}$ となり、電車の長さの $\frac{1}{4}$ 倍になるのでとても電車がトンネルの中に収まることはできません。このとき電車の先頭と最後尾は「同時に」トンネルから出ているので、先頭にいる人と最後尾にいる人が「同時に」外の風景の写真を撮ることもできます。

これはいったいどういうことなのでしょうか？ 「トンネル系から見れば電車はトンネルの中にすっぽり入っているのに、電車系から見れば電車の先頭も最後尾もトンネルから出ている」、そんなことが起こるのでしょうか？

これがどうなっているのかを詳しく見ていきましょう。トンネル系のトンネルに沿って x_1 軸を設定し、トンネルの入口を x_1 軸の原点とします。トンネル系でのトンネルの長さは L です。すなわちトンネルの出口の位置は $x_1 = L$ です。一方、電車の最後尾を電車系の x'_1 軸の原点とします。x'_1 軸は x_1 軸に平行で x_1 軸の正の向きに電車と共に速さ $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ で走っているとします。電車系における電車の長さは $2L$（トンネルの 2 倍）です。ですから電車の先頭の位置は**電車系**で $x'_1 = 2L$ となっています。

2.2 パラドックスの解消

いったい何がどうなっているのか考えてみましょう。そのため、はじめに前の章の「ローレンツ膨張？」で述べたことを思い出しておきます。図 1.19 あるいは図 2.1 を見ながらイメージしてください。例として $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の場合で考えてみましょう。トンネル系で見ると電車の先頭は最後尾から（長さが縮み $2L$ の半分の L になっているので）距離 L の位置にあります。一方電車系で見たときの電車の最後尾と同時刻の電車の先頭は、トンネル系の x_1 軸上では最後尾から（少し未来の）距離 $4L$ の位置にあります。トンネル系で見ている電車の長さは半分になっており、一方電車系における最後尾と同時刻の先頭の位置はトンネル系の x_1 軸上では電車の長さの2倍の $4L$ だけ前方の位置にある、ということです。これはどの瞬間においても言えます（図 2.1）。ここでポイントとなるのは前の章で話した「同時刻の相対性」です。電車系の電車の中の各点の時計は、トンネル系の観測者が見ると最後尾から進行方向に離れるほど最後尾の時刻より遅れた時刻を指しています（図 1.7）。つまり、トンネルの出口と入口の時刻は当然トンネル系の時計では同時刻ですが、トンネルの入口付近にいる電車の最後尾の時計が示す時刻と、出口付近にいる電車の先頭の時計が示す時刻はトンネル系から見た時、同じではありません。トンネル系の観測者は、トンネルの出口付近にいる電車の先頭の最後尾の時刻より少し過去（最後尾より少し前の時刻）の

姿を見ているのです。このような言い方をすると、もういなくなった電車の過去の姿が見えているのか？と思われるかもしれませんがそうではありません。トンネル系にとって電車が出口付近に来た瞬間、電車の先頭はそこにあるのです。例えば、先頭に乗っている人と、トンネルの出口にいる人と目が合うこともあります（尋常でない動体視力ですが。。)。電車の中のその人は確かにそこにいます。その人もトンネルの出口にいる人が見えていて、互いに確認することができます。トンネル系から見ると電車系の過去の先頭と先頭より未来の電車の最後尾が同時にトンネルの中に収まっている、ということです。出口と入口の扉を“同時に”（もちろんトンネル系において）閉じると、短時間ですがトンネルより長い電車が完全にトンネルの中に閉じ込められてしまいます。

このようにトンネルより長い電車がトンネルに閉じ込められていることを電車の立場から見たときどうなっているのでしょうか？　次に電車の立場、すなわち電車系から見た場合について考えてみましょう。

電車の最後尾がトンネルの入り口の手前$3L$の位置にある時、電車系における電車の先頭はトンネル系のx_1軸上で測って最後尾から$4L$の位置にあり、ちょうど出口のところにあります。この瞬間出口の扉が一瞬閉じます。しかし入口の扉はまだ閉じていません。電車系からトンネル系のx_1軸上にずらりと並んだ時計を見ると入口から出口に向かって、出口に近い時計ほど進んだ時刻を指しています。出口の時計

が扉を閉じる時刻になっていても、入口は出口より時刻が遅れており、まだ閉じる時刻になっていないのです。出口の扉がやがて開き先頭はトンネルから出ていきます。このとき（電車系における「この時」)、電車の先頭はすでにトンネルの出口から出てトンネルの外にあり、電車の最後尾はまだトンネルに入っていません。そのため、電車の先頭と最後尾にいる人は「同時に」電車の外の風景の写真を撮ることができます。

電車の最後尾がトンネルの入り口に入った瞬間（図2.1(C)、図2.2$\overline{OD}$）、トンネルの入り口のトンネル系での時刻は扉を閉める時刻になり、トンネル系の人が扉を閉じます。トンネル系では同時刻に出口と入口の扉を閉じましたが、電車系で見ると出口と入り口で扉が閉まる時刻は同時刻ではなく、先頭がトンネルから出る直前に出口の扉が閉じ、電車の最後尾がトンネルの入口に入った直後に入口の扉が閉じるので電車が扉に妨げられることはありません。電車系では扉が閉じる時刻は電車に設置された時計で出口の扉が閉じる時刻の方が早く、入口の扉が閉じる時刻はその時刻より後になっていますが、電車系の観測者が**トンネル系に置かれた時計を見て時刻を確認すると**出口で扉が閉じた時刻と入口で扉が閉じた時刻は同じ時刻を示しています。

このように電車系とトンネル系で同時刻が異なっているため、一方の系から見るとトンネルの中に電車の先頭と最後尾が“同時に”入っているのに、他方の系から見ると電車の先頭と最後尾が“同時に”トンネルの外にあるのです。

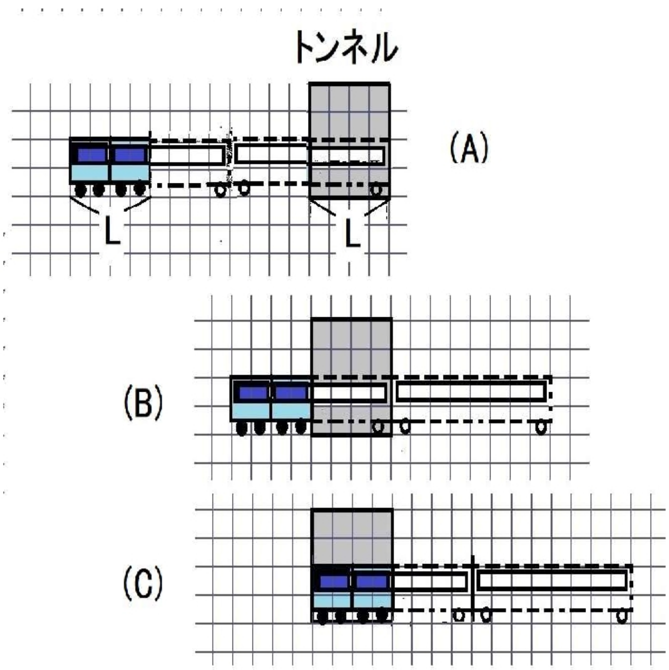

図 2.1: 色付きの電車がトンネル系で見た電車（トンネル系で同時刻の電車）で、点線の電車が電車系で最後尾と同 時刻の電車です

少し違った言い方をするとトンネル系で電車の先頭と最後尾が同時刻にトンネルの中にありますが、電車系では先頭が出口にある時刻と最後尾が入口にある時刻が同時刻ではなく、異なった時刻になります。

どちらの系から見たどちらの時刻なのかを誤解なく説明するために随分くどい説明になってしまいました。しかし、実は時空図(図2.2)を見ればここまでで説明したことは一目瞭然です。

Puzzle 2　必ず負けるじゃんけん?　トンネルの出口と入口にそれぞれ一人ずついるとします。そして、電車が来た瞬間に出口の人は電車の先頭にいる人と、入口の人は電車の最後尾にいる人とじゃんけんをします。ただし、トンネル系の2人は示し合わせてじゃんけんで必ず同じものを出すとします。電車の先頭の人は電車の最後尾より少し前の時刻の人なので、電車系において先頭の人がじゃんけんをしたとき、まだ最後尾の人はじゃんけんをしていません。そこで、先頭の人が出口の人が何を出したかを最後尾の人にすぐに伝えます。そして電車の最後尾がトンネルの入り口に入るとき、トンネルの入り口の人とじゃんけんをしますが、その人が何を出すのか先頭の人に聞いているので必ず勝つことができる、ということになりそうですが、これは正しいでしょうか？

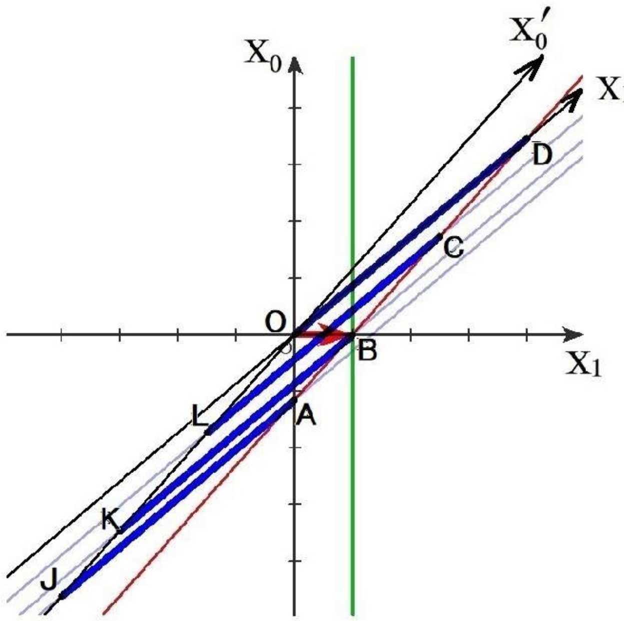

図 2.2: $\overline{JA}$ は電車がトンネルの入口にさしかかった瞬間で、$\overline{KB}$ は先頭が出口に差し掛かった瞬間で、$\overline{LC}$ は先頭と最後尾がトンネルの外に出ている瞬間、$\overline{OD}$ は最後尾がトンネルに入った瞬間になります。赤い矢印 OB はトンネル系からみた時の電車全体が完全にトンネルに入った瞬間です。

おわりに

数学においては、「AはBより長い」と「BはAより長い」の両方が成り立つことはありません。ところがこの現実の世界の中で「電車はトンネルより長いのにトンネルは電車より長い」ということが起こることに対し不思議な感じがすると思います。

私が小学校三年生の時、学級文庫に「驚異　なぞだらけの四次元」という本がありました（フレーベル館　ナンバーワンブックス）。その本の中で0次元から1次元、2次元、3次元、4次元と次元の話が出てきたり、相対性理論の話が出てきたりしました。相対性理論の話の中で双子のパラドックスがマンガで分かりやすく紹介されていました。これはこの本の中では話しませんでしたが、時間の遅れに関する話です。当時タイムマシンに興味があり、そのタイムマシンと関係がありそうだったので、それ以来私は相対性理論に惹かれ興味を持ちました。これが私と相対性理論との初めての出会いでした。それ以来、将来は相対性理論を研究したいと思うようになり、そのまま進み続けました。最終的に研究者になることはできませんでしたが、それまで関わってきた物理の教師の道に進みました。

一人でも多くこの本により相対性理論に出会い、興味を持っていただければ幸いです。

著者紹介

著者略歴

島根県松江市出身
島根県立松江東高校卒業
（お笑い芸人かまいたちの山内健司さんも同校の卒業生）
大阪大学理学部物理学科卒業
新潟大学大学院理学研究科前期修士課程物理学専攻修了
同自然科学研究科後期博士課程エネルギー基礎科学専攻修了
現在　静岡県立高校物理教師

以下は「無名の著者」が「怪しいものではない」ということを示すために載せました

主な研究テーマ及び論文

素粒子論、 超対称性、 超対称標準模型
アノマラスU（1）による超対称性のダイナミカルな破れ
超対称標準模型におけるニュートリノの質量行列の計算

Effective theory description of anomalous U(1) supersymmetry breaking and its embedding into supergravity
Prog.Theor.Phys.101(1999)439

Low-energy constraints from unification of matter multiplets
Phys.lett.B512(2001)349

Lepton flavor violating processes in the bimaximal texture of neutrino mixings
Physical Review D 65 (9), 2002-05-14

See-Saw Realization of the Texture Zeros in the Neutrino Mass Matrix
Phys.lett.B538(2002)96

Lepton Flavor Violating Process in Degenerate and Inverse-Hierarchical Neutrino Models
Phys.lett.B527(2002)206

著者の他の書籍

＜紙書籍＞
「私、物理は苦手なので…（序）」
デザインエッグ社　ムゲンブックス

＜電子書籍＞
「色」は実在なのか
～生物が発明した「色」という奇跡の方法～
デザインエッグ社　パブー

中学生・高校生のための数式を使わない物理の本
デザインエッグ社　パブー

ご意見、質問など
akage43-paradox@yahoo.co.jp
までお願いします。（質問にはお答えられない場合もございますが、可能な範囲でお答えしようと思います。）

電車とトンネルのパラドックス

著　　　藤山篤司

制　作　Puboo
発行所　デザインエッグ株式会社