



物理の授業の 余談



宇宙の話 次元の話 等

研究者を目指した物理教師の本

—— 蔭山篤司 ——

目次

はじめに	3
休憩①（余談 心の定義 善と悪の定義）	7
休憩②（余談 学級文庫で出会った4次元の世界）	11
次元の話	12
休憩③（余談 宇宙の果て 宇宙の形 宇宙の中心？）	21
休憩④（余談 最後の1分まで）	29
休憩⑤（余談 金魚の子のミステリー）	33
休憩⑥（余談 連続無限次元空間）	37

はじめに

この本の内容は、物理の授業と直接は関係ない話ですが、授業の雑談として話した内容を中心に集めたものです。別の本「中学生・高校生のための数式を使わない物理の本」の中の余談のみを抜き出したものです。少し想像力をはたらかせながら読んでいただけたらと思います。

この本を作成するためのeditorにおいて、使える文字が限られているため、文字に添字を付

休憩①（余談 心の定義 善と悪の定義）

職場で、同僚の倫理の教員と時々倫理の授業の内容に関する話をするすることがありました。彼が、物理的な視点での私の考えを聞いたのがきっかけだったと思います。初任でわが校に着任して数年で、まだ若く、いろいろなことに積極的に、前向きに取り組む教員でした。研究授業などで、何度か彼の授業を見学させてもらったことがありますが、興味深い内容で、面白い授業だと思いました。廊下を歩いているとき、彼の授業を見かけると、少し立ち止まって「どんなことをやってるのかな？」と黒板を見るがありました。

ある時、彼から「倫理の単元で性善説と性悪説があり、人の本性(心)は元々善なのか悪なのかというのをやるんですけど、(性善説か性悪説か)どう思いますか？」と、問われました。みなさんは、こんなことを問われたらどう答えるでしょうか？そして、どう考えるでしょうか？心については私も興味あることだったので、考えてみました。しかし、このような議論をするときは、まず「心」や「善」や「悪」を定義しなければ議論が始まらないと思いました。お互いに漠然と「心」とはどんなものか、イメージは持っていると思いますが、そのイメージはやはり漠然としたもので人によって違うと思います。「善」や「悪」についても同じです。これらはちゃんと定義しようとすればするほど難しくなります。他の動物は心を持っているのか、魚や昆虫はどうなのか。その質問を受けるより少し前に、NHKの番組で「ダンゴムシの心」についての内容をやっていたのを見たことがありました。詳しくは触れませんが、それはとても興味深い内容でした。ダンゴムシには脳が無いのに、「心」らしきものがある、というのです。飽くまでそのダンゴムシを研究している研究者の定義による「心」ですが、その研究者(森山徹)の著書「ダンゴムシに心はあるのか」で詳しく説明されています。

「善」や「悪」も、立場の違いにより変わることも十分に考えられます。世界中で争いが絶えないのもそのためでしょう。そもそも絶対的な「悪の定義」が存在するのか私は疑問に思っています。例えば、人間以外の生物において、「悪」と呼べる行動はあるのでしょうか？もし、幅広い定義として「他の人や生物に対して損を与える行動」を「悪」と呼ぶなら、おそらく全ての生物に「悪」と呼べる行動があると思います。もちろん人間にも。例えば他の生物を食べる行動は「悪」であるはずですが、それを「悪」でないとするなら、「悪」の定義の境界線の引き方は人間、あるいは定義する人のさじ加減になってしまいます。また、善か悪かは、「人間の行動」なのか、「人間の思考そのもの」なのか、あるいはもっと別のことで定義されるべきなのかさえ、私ははっきりとは答えられません。人間のある行動や思考が「悪」であるかどうかを判断するには、やはり「悪」が明確に定義されなければ判断できません。ここで私が「善」や「悪」や「心」について明確な

定義を持っているわけではありません。また、性善か性悪かということが、全人類共通に決まっているのか、人それぞれなのか。サルには善や悪があるのか。議論を始めれば、終わりが見えません。「性善説」か「性悪説」かを議論する前に、「善とは何か」「悪とは何か」について十分に議論する必要があると思います。きっと答えは見つからないと思いますが。ただ、その場で議論している人達の間で「善」「悪」「心」のその場での定義をして議論すれば、その場での結論は出るかもしれません。しかし、また違う定義のもとで議論すれば違う結論が出ることもあると思います。それはそれで構わないと思います。どんな定義が妥当な定義なのかは、その場その場で異なり、「その時の議論の目的」、「何のために定義が必要なのか」によって決まると思います。

ここで話したかったのは、これらを定義しようということではなく、人によって定義が異なるような曖昧さがある事柄について議論するときには、まず、相手と自分との間の定義のずれを埋めておく必要がある、ということです。ただし、曖昧さがあるとわからないままに議論が始まることがあります。「何か、話が噛み合わないな」、ということがよくあります。そんなときは、多くの場合、自分が当たり前だと思っていた定義が、実は相手とずれている事が原因です。「あれ？ なんだか話がわかってもらえないな、噛み合わないな」、と思ったときには、お互いに言葉や概念の定義を確認することが大切です。

休憩②（余談 学級文庫で出会った4次元の世界）

私が小学校3年生の頃、教室に学級文庫がありました。クラスのみんなが持ち寄った本だったのか、担任の先生が用意したのかははっきりとは覚えていません。結構いろんな本がありましたが、その中で「驚異 なぞだらけの四次元」という本がありました。もちろん、子供向けの本で、絵やマンガを使って書かれていました（昭和50年代の話なので、そんな古い本の情報なんてないだろうと思って検索してみると、なんと正にその本が出てきました！（フレーベル館のナンバーワンブックス））。当時、もちろんまだ何も知らない小学3年生の私でしたが、とても興味を惹かれました。

次元の話

最初に、次元の話が出てきました。ゼロ次元から始まり、1次元、2次元、3次元、とそれぞれの次元についてアリの視点から説明があります。次元の説明するときに、よくアリの視点が用いられます。おそらくその理由は、人間の視点では常に3次元空間を見て認識しているので、3次元空間の中の2次元の面や、2次元面に描かれた1次元の線、という見方になってしまうからだと思います。もちろんアリも3次元の生物ですが、アリの視点では、全体が見えておらず、目の前の世界だけが知ることのできる世界なので、イメージするのに都合が良いのだと思います。アリの視点とは、その次元の空間に貼りついた目を見た視点、ということです（もちろん、1次元は長さしかないのも、そもそも生物は存在できない、とか左右の目など持てないとか細かいことは考えない立場での話です）。私はその時初めて「次元」という概念を認識しました。このアリの話は、後に、宇宙飛行士の野口聡一さんが著書「宇宙おいでよ」の中で触れていたり、コミック「宇宙兄弟」の中でも野口聡一さんのエピソードとして登場しています。野口聡一さんがこの本を読んだかどうかはわかりませんが私が知る限りにおいては「驚異なぞだらけの四次元」がアリの話としては一番古いです。野口聡一さんは単なる次元の説明を超えて、発想や視点の転換について話をされており、とても面白いと思いました。

後で必要になるため、ここで少し次元の話をしておきます。「○○次元空間」は、実際に存在するかもしれないかはおいて、飽くまで数学的な「○○次元空間はこんな世界だ」というように理解しておいてください。（実際に存在が考えられている次元もあります。あるいは、『理論的に矛盾のない世界を構成できる次元はこの次元だけだ』という理論もあります。我々の宇宙も、3次元空間と時間を合わせた四次元時空ですが、さらに見えないほど小さく丸まったたくさんの次元が存在してる、とか。いずれにしても、これらの実験的証拠はまだありません。）

ゼロ次元は、広がりがない、点の世界です。「点なんて、何も無いのと何が違うのか？」と言われるかもしれませんが、確かに、何も違わないのかもしれませんが。そこに1次元が加わると、1次元の世界になります。線の世界です。直線でも曲線でも構いませんが、その線に沿ってのみ進むことができます。線の上は、進むか戻るかしかできません。3次元に住む我々がイメージすると、面に描かれた線を思い浮かべますが、1次元に住む人にとって、線から外れた世界は見えません。「あるのに見えない」のではなく、1次元に住む人にとってはそもそも線の外の世界は存在していません。（そして、その線の世界に住んでいて、線の世界の情報しかなければ、直線なのか、曲線なのか判断できません。）その線の上のどこかに障害物があれば、それより先に進むことができません。戻ることしかできないのです。ここで、この世界にもう1つ方向が加わると、2次元の面の

世界になります。もう1つの方向が加わるとは、2つの方向を組み合わせるにより面内のどの位置にも移動できる、ということです。例えば、東西方向と南北方向の組み合わせで、地球の表面上のどこにでも行けるということです。この面は、平面でも曲面でも構いません。先程の線の上に障害物があっても、線から外れて障害物を避けて通ることができます。これが2次元の世界です。もし、あなたが線から外れて障害物を避けて通れば、1次元の人には、あなたが突然何処かへ消えてしまったかのように見えます。

2次元のあなたは線の上の障害物を避けることはできましたが、今度は、あなたの前に左右方向に無限に延びる壁があります。そうすると、その壁の向こうへ行くことはできません。無限に延びる壁でなくても、あなたの周囲をぐるっと壁で取り囲まれれば、壁の外へ出ることはできません。ここに面の方向とは別の、面に垂直なもう1つの方向が加わると3次元の世界になります。高さの方向が加わったと思えばいいです。高さの方向が加わると、3次元空間内のどこへでも移動することができます。東西南北に加えて、高さの方向にも移動できるからです。3次元のあなたは、面から離れて、壁を登ることができます。そして、壁の向こうへ行くことができます。この時、3次元のあなたが面から離れて壁を登り始めたとき、2次元の人には、突然あなたが何処かへ消えてしまったかのように見えます。

まだこれで終わりではありません。次に、左右方向に無限に延びるとともに、高さの方向にも無限に延びる壁があると、あなたはその壁の向こうへ行くことはできません。あるいは、無限に延びる壁でなくても、壁があなたの周りをぐるっと、そして天井も、地面もあなたを取り囲めば、あなたはその外へ出ることはできません。しかし、この3次元の3つの方向全てに垂直な4つ目の方向が加わり、4次元空間になれば、4次元目の方向へ移動して、この壁の向こうへ行くことができます。3次元のあなたがその人を見ていると、突然何処かへ消えてしまったかのように見えるでしょう。そして、また、壁の向こう側に突然現れます。この4次元目の方向は、もう1つの空間としての方向でもいいし、時間の方向と思ってもいいですが、時間は空間と「少し」性質が違うので、「もう1つ別の空間の方向」と考えた方がイメージはしやすいと思います。

ここでの話は、先程も言いましたが、飽くまで数学的な空間の話であって、現実の世界のどこかに1次元や2次元の世界があると言っているわけではありません。ただ、我々の住んでいる世界は、時間を含めて4次元時空だと考えられています。ものすごく小さく丸まった空間の存在も否定できないので、それらも含めると我々が住んでいる世界が実際に何次元空間なのかはわかっていません。私が大学院生の頃、小さくなっている1次元を加えた5次元で考える理論が流行ったこともありましたが（Large Extra Dimensionとか、Small Extra Dimensionなど）。

小学生だった頃の私は、この世界の他に、見えない、行くことのできない別の方向があるのだろうか、としましたが、想像もできませんでした。4次元目の方向は、我々の3次元の世界に直交する方向にあります。もちろん、どこを向いても我々にはその方向は見えません。当時、そんな方向が実在するのだろうか、とっていました。本当に存在するかどうかは置いておいて4次元空間や4次元の立体を想像することはできませんが、その輪郭（断面など）をイメージすることはできます。4次元立方体の断面をイメージするために、一旦、次元を落として想像し、そこから類推して高次元のものをイメージ

することができます。例えば、線を切ると切り口は点になり、面を切るとその切り口は線になり、立方体を切るとその切り口は面になります。この様に、切り口（断面）は1つ次元が落ちた世界になります。それから類推すると、4次元立方体を切ると切り口は3次元の立体になる、というわけです。当時の私にとってイメージすることは難しかったですが、理屈は分かりました。

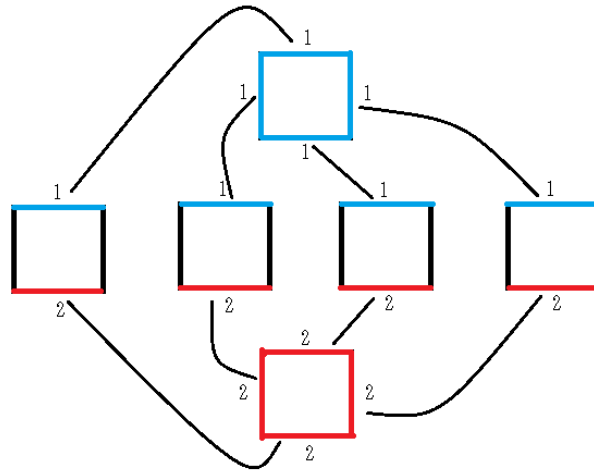
次にそれぞれの次元の『立方体』の展開図を考えてみましょう。2次元の『立方体』は正方形です。正方形は、同じ長さの4本の線（辺）で囲まれています。なので同じ長さの4本の線をつないだものが、2次元の『立方体』の展開図になります。3次元の『立方体』は我々のよく知るサイコロの形の正六面体の『立方体』です。3次元の立方体の展開図は、立方体には正方形が6面あるので、6つの正方形の辺と辺をはり合わせてつないだ形になります。これは小学生の頃、見たことがありました。この展開図を少し分析してみましょう。まず、正方形を6つ用意します。貼り付け方がわかりやすくなるように、辺に色を付けましょう。6つのうちの4つの正方形のそれぞれにおいて、向かい合う一組の2辺のうち、一方を青、他方を赤に色付けします。そして残りの2つの正方形のうち一方の4辺を全て赤、他方の正方形の4辺を全て青にします（図13[A]）。まず、辺が全て赤の正方形の4辺に、4つの正方形の赤い辺をはり合わせます。これで5つの正方形がくっつきました。この5枚のうち、何もはり付いていない青い辺が4つありますが、このうちのどれか一つに、全てが青い辺の正方形の一つの辺をはり合わせます。これで立方体の展開図が完成します（図13[B]）。次にこの展開図を折り曲げて立方体をつくりましょう。ただし、当然ですがこの「折り曲げ」は平面内ではできず、面に垂直な方向に折らなければ立方体はできません。まず、色のついてない辺を隣同士ではり合わせます。最後に4つの青い辺にすべての辺が青の正方形の辺をはり合わせれば、立方体が完成します。（最初に正方形を6つ用意したのは、1組の向かい合う2つの正方形と、正方形の辺の数の分の4つで合わせて6つでした。）

同様に、次元を一つ上げて4次元の立方体の展開図を作ってみます。はじめに立方体を8個用意します（2つの向かい合う立方体と、立方体の面の数6つで合わせて8個です）。そのうち6つの立方体のそれぞれの向かい合う一組の2面のうち、一方を青、他方を赤く塗ります。残りの2つの立方体のうち一方の6面全てを赤、他方の立方体の6面全てを青く塗ります（図14[A]）。次に6面全てが赤の立方体のそれぞれの面に6つの立方体の赤い面をはり合わせます。何もはり付いていない青い面が6つありますが、このうちどれか一つの面に6面全てが青の立方体の1つの面をはり合わせます。これで4次元の立方体の展開図が完成しました（図14[B]）。この展開図を折り曲げて面どうしをはり合わせれば4次元の立方体が完成しますが、もちろん3次元空間の中で折り曲げてはり合わせることはできません。この展開図を4次元空間の中で折り曲げて4次元立方体をつくりましょう。4次元空間の中で折り曲げて色のついてない面を隣同士ではり合わせます。最後に6つの立方体の青い面を、全ての面が青の立方体のそれぞれの面にはり合わせれば4次元の立方体が完成します。

完成した4次元の立方体を想像することはできませんが、次元の低いところでのイメージを類推して4次元や、さらに高い次元の想像が可能になることを知りました。直接イメージできなくても、類推はできることがわかりました。

さらにその本には、今でこそいろいろな本に書かれている、アインシュタインの相対性理論の話で出てくる、双子のパラドックスの話が漫画で描かれていました。ある教授が若い助手を連れて、光速に近いロケットで片道 10 光年の旅に出る、というストーリーです。相対性理論の効果により、地球に戻った時、地球では 20 年経っているけど、ロケットの中では時間がゆっくり進み、（ロケットの速さによりますが、例えば）0.6 年しか経っていないということが起こります。その当時、タイムマシンに憧れを持っていた私は、こんなことが理論的に考えられているのかと、衝撃を受けました。その時から、相対性理論に興味を持ち、将来は物理の研究者になりたいと考えました。しかしその後、30 歳を過ぎるまで研究を続けましたが、最終的に叶わず、違う道に進みました。そして現在は高校の物理の教師してと生徒に接しています。

【A】



1 青
2 赤

【B】

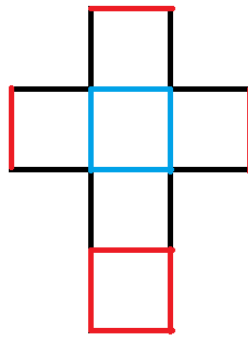
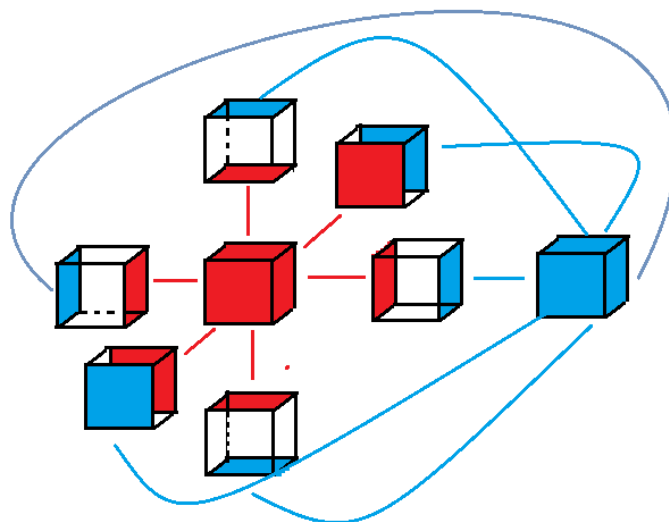


図 13 三次元立方体の展開図

【A】



【B】

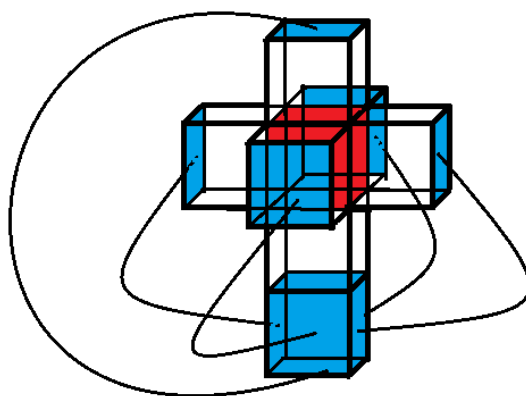


図 14 4次元の立方体展開図

休憩③（余談 宇宙の果て 宇宙の形 宇宙の
中心？）

私がまだ小学生になる前、世界の果てについて考えたことがなかった頃、(2歳上の)兄だったか、あるいは父だったかに、地球は丸くて、ずっとまっすぐ進むと反対から帰ってくると聞き、衝撃を受けました。地面は平らだと思っていたので、それが丸いということとなかなか結びつきませんでした。しかし、世界地図を見たり地球儀を見たりするうちに、地球の大きさが自分の想像を超えてとても大きいことを知り、一部を見ていると平らなものが、全体では丸いということを受け入れられるようになっていきました。

それからしばらく経って、小学校の4年生か5年生の頃、何かの本で、「宇宙は果てがないけど有限であり、そして宇宙に中心はない」ということが書かれているのを読みました。果てがなくて有限というのは、ちょっと大雑把に言えば、ずっとまっすぐ進むと反対側から元の位置に戻ってくる、ということです。幼い頃に聞いた、地球は丸くてまっすぐ進むと反対から帰ってくる、という話と似ています。この宇宙空間は(時間の1次元を除けば)3次元ですが、「果てがないけど有限」な3次元空間をイメージするのは難しいので、まずイメージしやすい低い次元から考えてみます。1次元の線の世界で有限だけど果て(端)がないのは、線の端と端をつないだ円になります(きれいな円でなくても構いませんが)。正確には円そのものではなく、円周になります。線に沿って「まっすぐ」進むと反対から元の位置に戻ってきます(図15A)。次に1次元を上げて2次元の面の世界で考えてみましょう。面の世界で有限で果てがないものは、例えば球(ボールや地球など)の表面になります。(先程の「円周」は2次元の“球”(円)の表面と考えることもできます。)3次元の球の表面は有限だけど果て(端)はありません(穴の開いたドーナツの表面のような面も有限で端がありません)。ボールや地球の表面には果て(端)がありませんが、面積は有限です。そして球の表面ではどの方向にまっすぐ進んでも反対から戻ってきます(図15B)。球の表面上での「まっすぐ」とは、その球の表面に住んでいる人にとっての「まっすぐ」です。ここではあまり深入りしませんが、球の表面でいうと、例えば北極と南極を最短距離で結んだ線に沿って、すなわち経線に沿って一周回るといった経路や、赤道に沿ってまっすぐ進む経路が地球表面上では「まっすぐ」な直線の経路になります。この経路は2次元球面の世界の中で「まっすぐ」です。球の表面の場合、北極から出発すると、どの方向に「まっすぐ」進んでも南極を通して一周回って反対から戻ってきます(図15B)。このことから類推して想像すると、4次元球の「表面」(「面」と言っても実際は2次元面ではなくて3次元空間ですが)が有限だけど果てがないということで、理解したつもりになりました。この宇宙もイメージは球の表面で考えたことと同じで、地球からどの方向にまっすぐ(我々の3次元空間の中でのまっすぐ)進んでも、宇宙を一周回って反対から戻ってきます。我々の世

界から見たら、どう見ても「まっすぐ」な方向です。まっすぐ進んでいるのに反対から帰ってくるのです。4次元球の表面はなかなかイメージは難しいかもしれませんが、3次元球の表面からの類推で少しイメージできると思います。また、宇宙には中心がないということもその本当の意味が分かったのはその頃でした。地球の表面上には中心がなく、どこも同じで特別な点はありません。同様に、4次元球の表面（この宇宙空間）にも中心はありません。

そのことを知ってから程なく宇宙はずっと変わらないものではなく、膨張していることも聞きました。宇宙に始まりがあることもその頃知りました。それも衝撃でした。無限に昔から宇宙があったのだろうか、この後も、無限に未来まで宇宙は続くのだろうか、と思ったことはありましたが、それ以上考えが進むはずもなかった頃、宇宙に始まりがあることを知ったのでした。この宇宙の膨張のため、実際は光でも宇宙を一周まわって反対から帰ってくることはできないようなので、飽くまで宇宙の形についての想像にとどまりますが、宇宙が膨張していることや、「まっすぐ」どこまでも1つの方向に進むとそれが反対と繋がっていることが、とにかく衝撃でした。実際の我々の宇宙の場合、もちろん反対から帰ってくるのが実際に確かめられているわけではありませんし、確かめようもありませんが。

ここで、宇宙の形についてちょっと想像で遊んでみましょう。実際は宇宙は時間を除いて3次元空間ですが、想像が難しいのではじめに空間の次元を1つ落として宇宙を2次元として考えてみましょう。先程述べたように、3次元の球の表面は2次元なので想像できると思います。この3次元の球の表面（2次元）を我々の宇宙と考えてみましょう。はじめに平面内に輪ゴムを2つ並べて、輪ゴムが平面から離れないようにしたままその輪ゴムの外側同士全体をくっつけようとしてもくっつくことはできません（図16）。これを平面ではなく曲面である3次元球の表面でやってみます。3次元球の表面に、輪ゴムを2つ置きます。北極と南極のように、反対側におきましょう。そして2つの輪ゴムをどんどん大きくしていくと、中間、すなわち赤道に当たるところで出会い、2つの輪ゴムの外側同士がぴったりとくっつきます。平面内ではできなかったことが（曲面である）球面上ではできたのです（図17）。これを次元を1つ上げてやってみます。今度は輪ゴムではなく、ゴム風船を2つ並べます。3次元空間内で、どうやっても、2つの風船の外側の表面全体同士をぴったりはりあわせることはできません。しかし、1つの風船をここに、もう1つの風船を宇宙の反対側に置いて、両方の風船をどんどん大きくしていきます。2つの風船が宇宙の半分ずつを占めたとき、2つの風船の表面全体同士がぴったりとはりあわされます。不思議ですが、再び3次元球の表面の話に戻ります。3次元球の表面に輪ゴムがあるとします。その輪ゴムの内側と外側があります。わかりやすく区別するために、内側を赤く、外側を青く色付けしておきます。自分が球面上にいて、その輪ゴムの外から見ると、青く見えています。その輪ゴムを球面から離れないようにしたままどんどん大きくしていきます。そして輪ゴムの直径が球の直径の大きさを超えると、今度は小さくなっていき、もとの大きさに戻ります。この時、輪ゴムの内側と外側が入れ代わって、外から見ると赤く見えています。今度はこれを1次元増やした3次元の世界でやってみます。我々の宇宙空間です。ゴム風船があり、内側が赤く塗られて、外側が青く塗られています。今、この風船を外から見ると青く見えています。こ

の風船が広がり、どんどん大きくなって宇宙の「直径」を超えると今度は小さくなっていき、元の大きさに戻ります。その時、内側と外側が入れかわり外から見ると赤く見えています。球面の表と裏（外側と内側）を入れかえることができたのです。これも想像が難しいですが、4次元の球の表面上ではそのようなことが起こります。

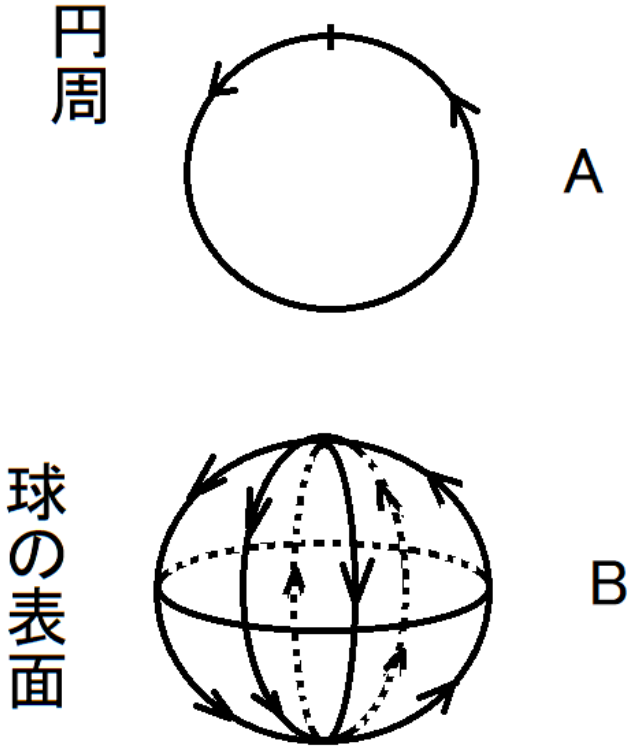


図 15 果てのない1次元 2次元

平面上の輪ゴム 2 個

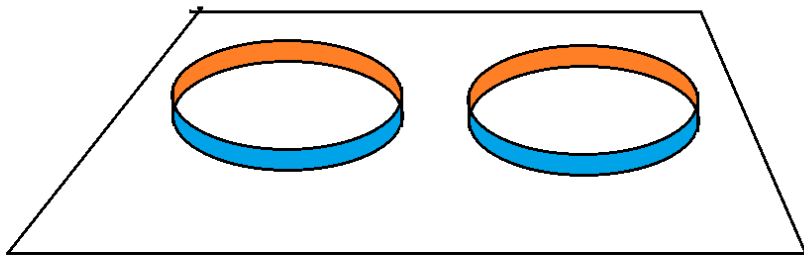


図 16 平面上の輪ゴム

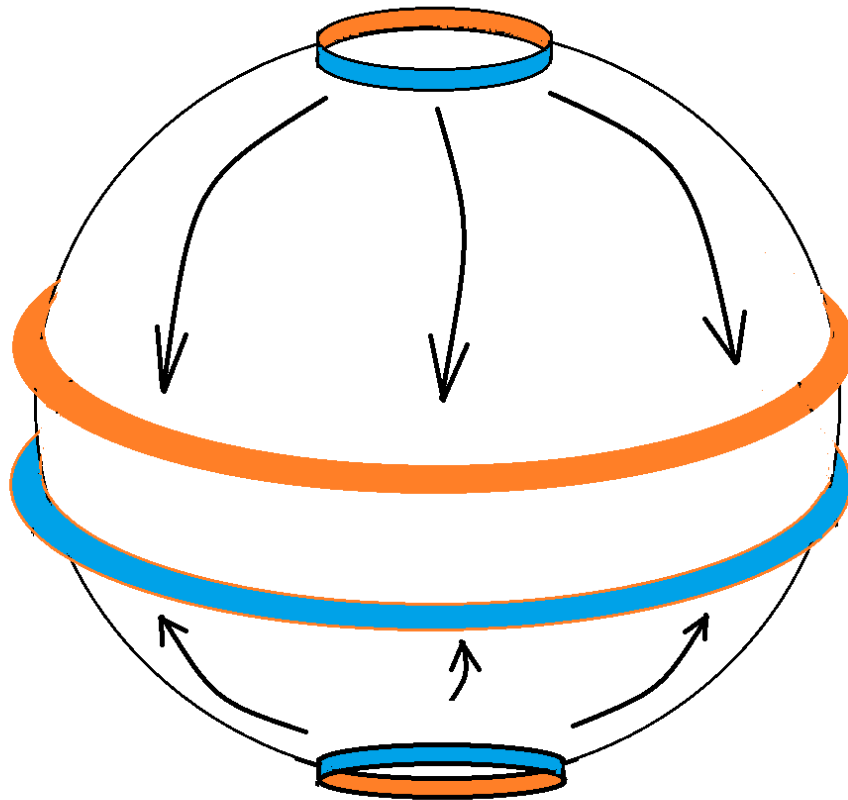


図 17 球面上の輪ゴム

休憩④（余談 最後の1分まで）

これは、私が高3の時の大学入試に失敗して、高校（自分の通っていた高校でなく、同じ市内の兄が通っていた高校）に併設されていた補習科という、大学受験に失敗した卒業生を受け入れるところに入って浪人していた時の話です。担任の先生が模試などの前には必ず「最後の科目まで、最後の1分まで戦え！」と言ってました。もう、この一年の後はない、と思って浪人していたので、その言葉の意味はわかっていました。模試のときには必ず、最後の鐘がなるまで、時間を使って解いたり確認したりしていました。一年後の、今と名前は違いますが（当時は共通一次試験）センター試験のとき、物理学科志望で、物理が得点源だったにも関わらず、物理で失敗して、それまで取ったことがないほど低い点数でした。かなりのダメージを受けましたが、「最後の科目まで、最後の1分まで戦え！」という言葉の思い起こし、残りの科目、そして最後の科目の「地理」に取り組みました。地理は、自分の一番苦手科目で、模試でもいつも足を引っ張ってました。それでも全力で取り組みました。結果は、過去最高点で、いつもの物理の点数より、ちょっと低いくらいでした。トータルの点数は、第一志望の大学のボーダーにも届いていませんでしたが、二次試験での逆転が可能だったので、第一志望の大学を受験できました。あの地理のお蔭で首の皮一枚繋がりました。

希望の大学に入学して1年か2年経った頃、スラムダンクの連載が始まりました。その中で出てくる、あの安西先生の有名な言葉「あきらめたらそこで試合終了ですよ」があの担任の先生の言葉と重なり、とても共感しました。

受験生の、皆さんには「最後まで諦めない」とこと、「最後まで気を抜かない」ことを心に留めて受験を乗り越えて欲しいと思います。

休憩⑤（余談 金魚の子のミステリー）

これは、物理とは全く関係ない話ですが、ちょっとした不思議なことがあったので、何が起こったのか考えてみて欲しいと思います。10年くらい前だと思いますが、水槽で金魚を飼っていました。幅40cmくらいで、高さ25cmくらいの大きさの水槽だったと思います。時々卵を産んで、子どもが生まれてきました。水槽の上には、ガラス板のふたがしてあり、水面とガラス板の間は3~4cmくらいでした。エアポンプで泡がブクブク出てました。その泡がはじけて、ガラス板には常に水滴がいくつもついていました。ある日、そのガラス板を上からのぞいていると、ガラス板についた水滴の中に、生まれたばかりの稚魚が入って水滴の中で動いてました。他の水滴2つか3つの中にも同じように稚魚が入っていて水滴の中で動いてました（図21）。何が起きているのか分かりませんでした。生まれたばかりの稚魚が水面からジャンプして水滴に入ったとは考えられません。3~4cmは水面から離れていたのです。稚魚は2~3mmくらいで、水滴とほぼ同じくらいの大きさです。大人の金魚が尾ビレでバシャッとしたときにたまたま稚魚もいっしょに、とも考えにくいです。今でも、はっきりとは理由が分かりませんが、どのようなことが考えられるのでしょうか？

もしかしたら、ということが後日見つかります。ある日、同じように見ていると、稚魚ではなく中に卵がある水滴がありました。しかも複数のそれぞれの水滴に卵が入ってました。もしかしたら、水から離れたガラス板に直接卵を産み付けていたのではないかと思います。その後、そこで生まれたのではないかと。定かではありませんが。

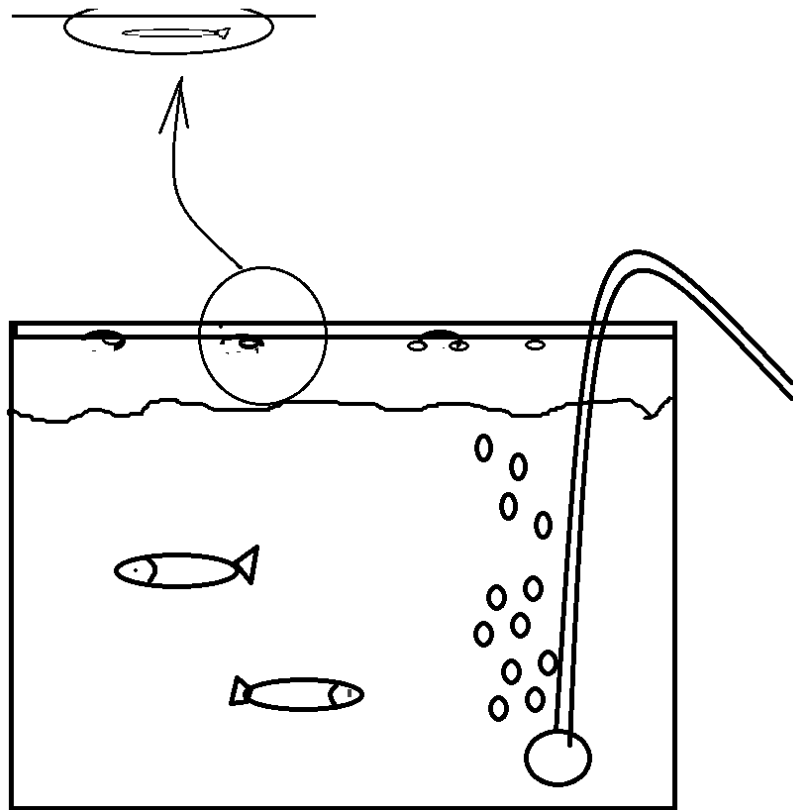


图 21 金魚

休憩⑥（余談 連続無限次元空間）

宇宙の話の余談で出てきた次元の話の話を少し拡張してみましょう。数学で「ベクトル」とか、「内積」という言葉を聞いたことがない人はこの余談は、飛ばしていただいて構いません。聞いたことがなくても半分以上は理解できると思います。ここではイメージだけ伝わればいいかな、と思っているので、興味ある人は更に専門的な教科書等を読んでみてください。これは純粋に数学的な空間、あるいは次元の話であり現実世界の次元の話ではありません。ですが、純粋な数学のように緻密な議論をするわけではなく、ちょっと大雑把な話に留めます。

はじめに、無限の種類を少し区別しておきましょう。1、2、3、...と数えられる無限個の整数のような無限を「可算無限」と言います。一方、全ての実数の個数のように数えられない場合の無限を「非可算無限」と言います（正しい数学用語ではないかもしれませんが、イメージを伝えるために「非可算無限」をここでは「連続無限」と言っておきます）。例えば可算無限個の数の集まりである（全ての）整数は1、2、3、...と自然数でラベル付けすることができますが、「非可算無限」個の数の集まりには、全ての要素に1、2、3、...と自然数でラベル付けすることはできません。例えば、全ての実数に対して整数でラベル付けすることはできません。例えば区間を短く区切ってもその中には非可算無限個の実数があり、自然数でラベル付けすることはできません。

無限の話は一旦置いておいて、次に2次元の xy 平面内の任意の1つの点の座標を (x, y) と表します。この後の話の都合上（後で文字が足りなくならないように）、 x を x_1 、 y を x_2 と書き換えておきます。同様に z は x_3 、などとします。2次元空間の点なら (x_1, x_2) 、3次元空間の点なら (x_1, x_2, x_3) と表すとしましょう。N次元空間の点なら $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ となります。ここで、N次元空間内の点が1つ決まると、その点の座標として、 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ が定まり、それぞれの座標軸上の値が定まります。例えば $(5, 2, 8, \dots, 7)$ 等のように決まります。ここで、これを少し見方を変えて、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ を x 軸上に並べます。とりあえず、 x 軸上の1のところから $x_1, 2$ のところに x_2, \dots と並べていきます。縦軸を y 、横軸を x として xy 平面内に N 個の点が並び、それらを線で結べば、折れ線グラフが描けます（図 22~24）。ただし点と点を結ぶ線は、グラフを見やすくするためにつけた線であり、線自身はグラフには含まれないとします。元の N 次元空間内の1つの点に対して1つの折れ線グラフが定まります。逆に x 軸上の $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ の所に値を持つ1つの折れ線グラフを与えると、 N 次元空間内の点が1つ定まります。今、 x 軸上の1から N までの整数の位置にしか点がありません。

ここで少し拡張して、 x 軸上に並んだ N 個の点 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ を、 $x = 0$ から x_N までの連続無限個の実数 x に拡張して、 N 個の点を持つ折れ線グラフを、実数 x を変数とする関数 $f(x)$ に拡張して考えます。 $f(x)$ 自身は連続でなくても構いませんが、イメージしやすいように連続な関数としておきましょう。直線や2次関数、3次関数などをイメージしてもらえばいいです。どんな関数でも構いません。先程述べたように、変数 x は連続な実数 $(0 \leq x \leq x_N)$ です。最初に考えた折れ線グラフの変数 $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ は可算な数でしたが、今考えている関数 $f(x)$ の変数 x $(0 \leq x \leq x_N)$ は非可算無限個（連続無限個）の数です。変数を取る値の数を可算な数から非可算な数に拡張しました。次に折れ線グラフの場合、 x 軸上の点 $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ に対応した N 次元空間の N 本の座標軸を考えたのと同様に、 x 軸上の全ての实数に対応した連続無限次元空間の連続無限本の座標軸を考えます。もちろんこれらの各座標軸に自然数でラベル付けすることはできません。そもそも、非可算無限（連続無限）個のものを可算無限の自然数でラベル付けすることはできません。「本」と数えてるから、自然数でラベル付けすることができそうに思うかもしれませんが、そうではありません。そもそも、 x 軸上に連続的に無限個並ぶ実数も、1つ1つは点で、「個」と数えられますが、全ての実数に自然数でラベル付けすることはできません。先程述べたように短く区間を区切ってもその区間内の全ての実数に自然数でラベル付けすることはできません。1個の実数に対して1本の軸が対応します。実数の中の1つの要素を抜き出して「個」とか「本」とか言っているに過ぎません。

関数 $f(x)$ の形が与えられれば、 x 軸上の各点における $f(x)$ の値が1つ定まります。つまり、 x 軸上の1つ1つの実数に対応した連続無限次元空間内の各座標軸上の値が定まります。そして、これを連続無限次元空間の中の1つの点として表すことができます（図25）。連続無限本の座標軸は互いに直交している方向を向いているとします。もちろん連続無限次元空間の中でないと連続無限本の座標軸が互いに直交することはできません。連続無限次元空間を想像することはできませんが。

何故、わざわざこんな面倒なことを考えたかという、その1つの理由として、例えば2つの関数の積のある区間で積分したものを、「連続無限次元ベクトルの内積」とみなすことができるからです。2次元や3次元、...のベクトルの内積は、2つのベクトルの（ x 成分どうしの積）+（ y 成分どうしの積）+（ z 成分どうしの積）+... で表わせます。2つの関数の積のある区間で積分するということは、2次元や3次元のベクトルの内積をとることと同じことを連続無限次元空間の中で行っているというわけです。

私が学生だった頃、頭の中にこのイメージがなくて、「フーリエ変換」等、2つの関数の積を積分している時、「いったい何をやってることになるんだろう？」と悩んだことがありました。その当時はよくわからないけど、漠然と「関数の内積」と思っていました。関数を連続無限次元空間内のベクトルとみなし、2つの関数の積の積分を無限次元空間内の「関数の内積」とみなす考え方について説明している書物に出会うのにかかなり時間がかかり、私自身随分長い間もやもやした状態が続きました。そんな事もあって、これから大学で物理や数学を学ぶ人達がつまづきそうになったときの助けになればと思って

書きました。

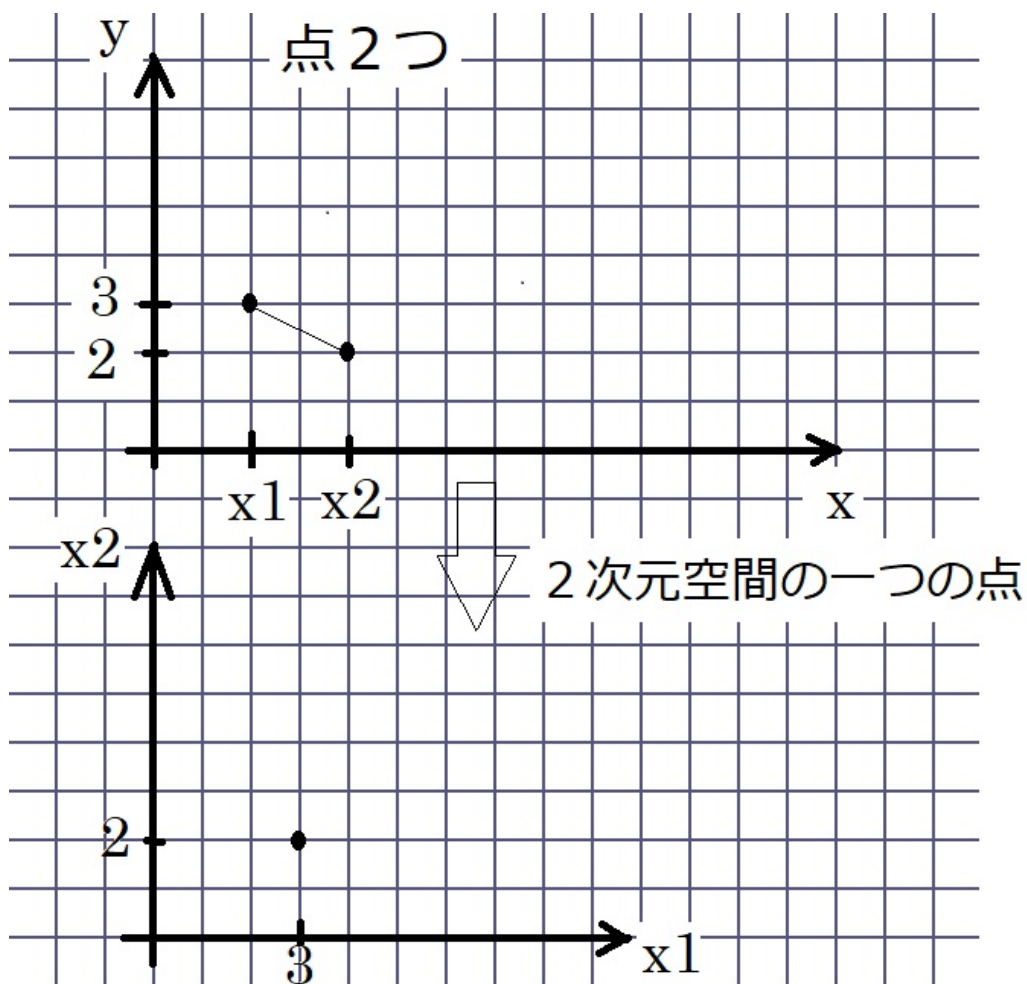


図 22 2次元 (点2つ)

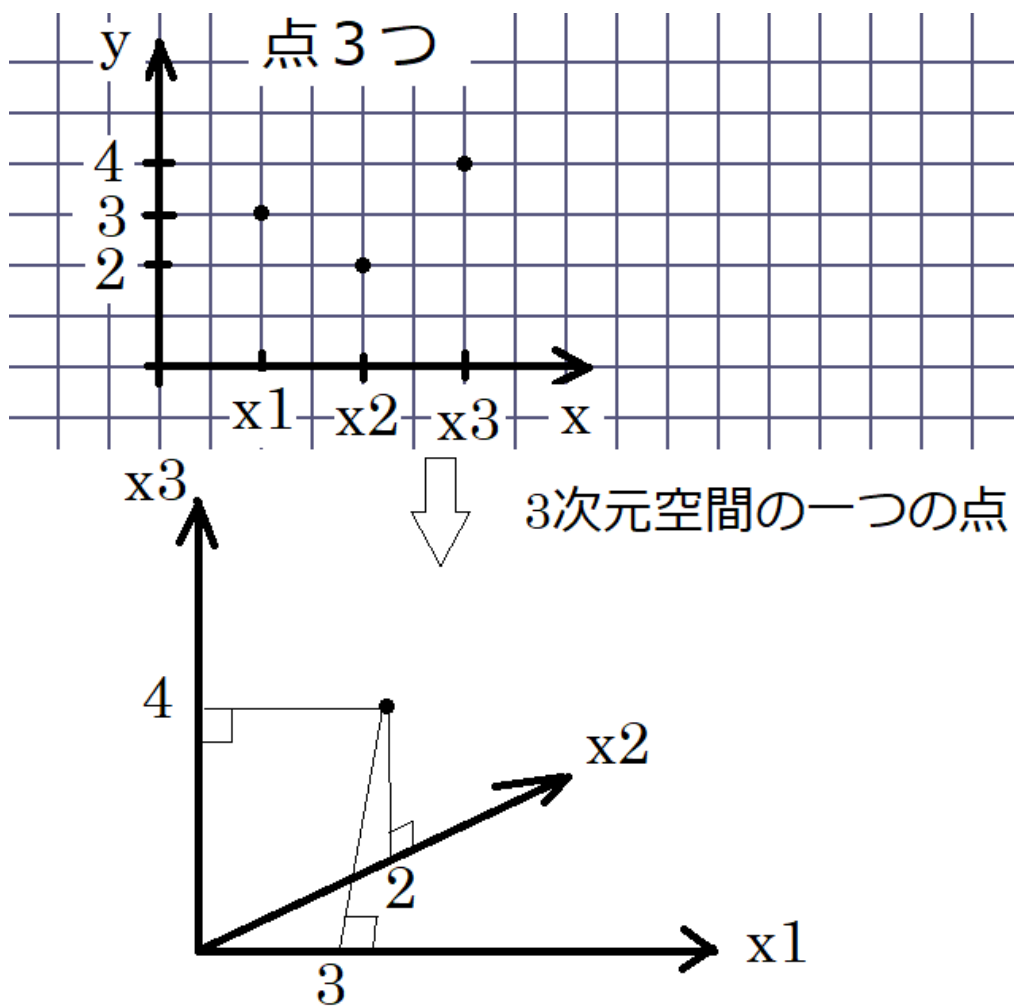


図 23 3次元 (点3つ)

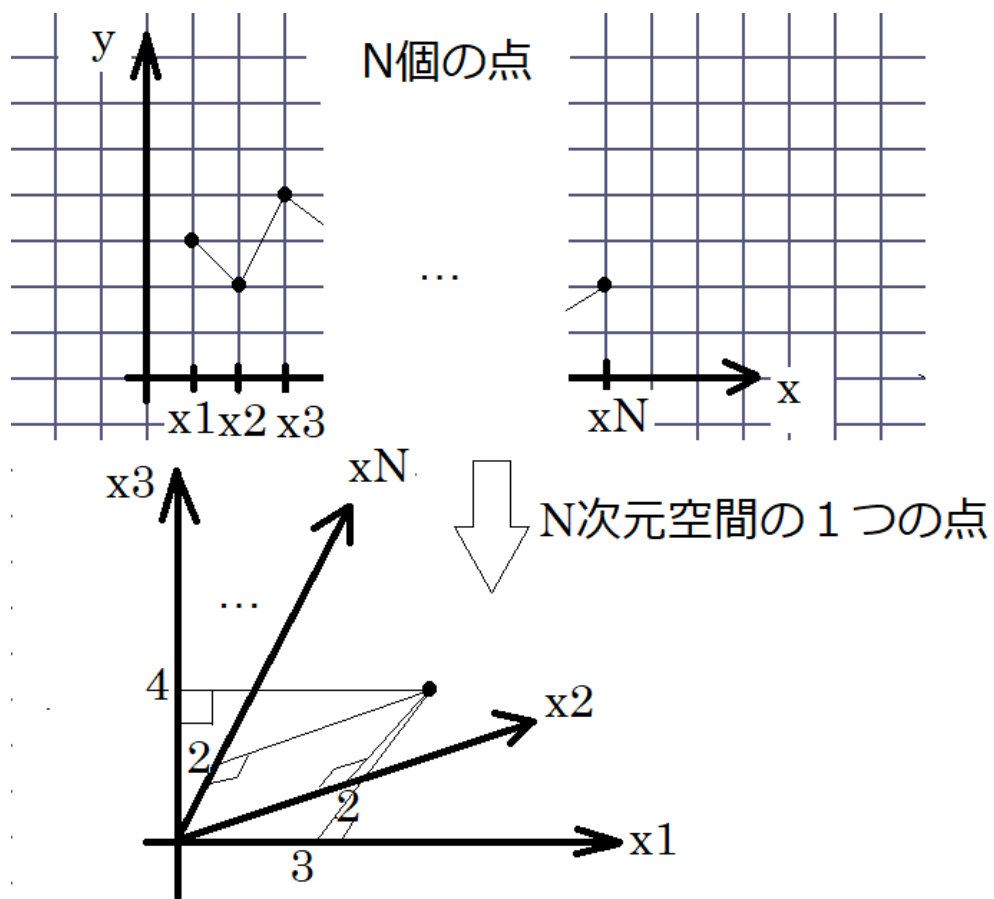


図 24 N次元空間 (N個の点)

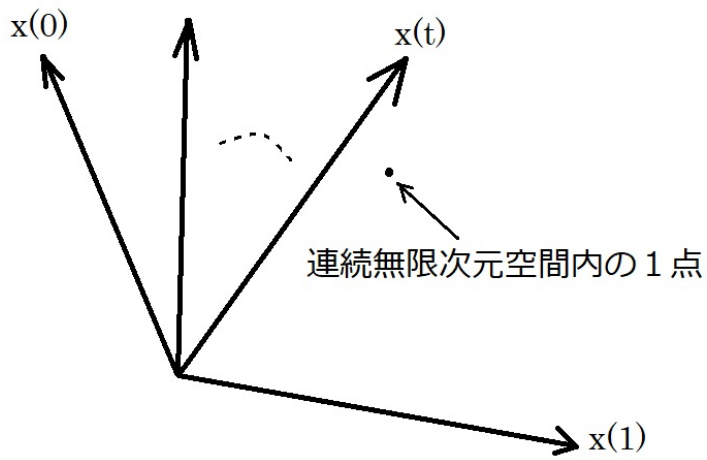
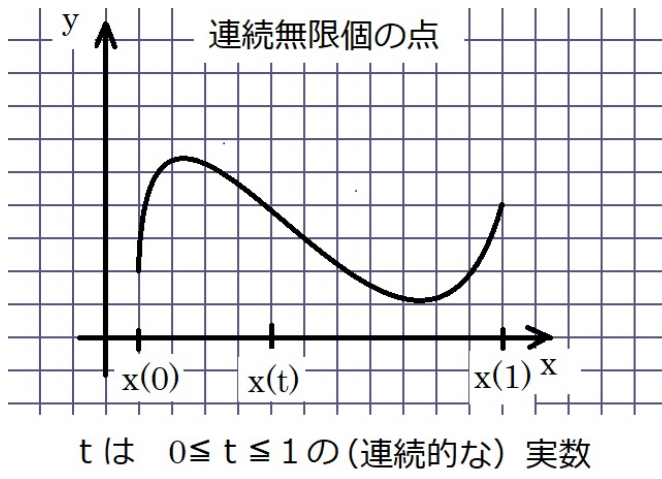


図 25 連続無限次元空間

物理の授業の余談～四次元の片鱗～

著 蔭山篤司

制作 Puboo
発行所 デザインエッグ株式会社
