



力学的エネルギー保存  
の仕組み



聞いたことあるけど説明できないこと  
を数式を使わないで解説！

蔭山篤司



# 目次

はじめに	3
変化量・増加量・減少量	7
保存力	11
保存力	12
位置エネルギー	13
保存力がする仕事	14
	16
運動エネルギーの変化量と仕事の関係	19
力学的エネルギー保存の法則	23
力学的エネルギー	24
出発点	25
力学的エネルギー保存の法則及び保存の条件	27



はじめに



この本は、「中学生・高校生のための数式を使わない物理の本」の一部「力学的エネルギーの保存」を抜き出したものに（この本で完結するように）少し修正を加えたものです。



変化量・増加量・減少量



物理に限りませんが、扱う様々な量が時間的に変化します。例えば、物理では「位置」や「速度」や「エネルギー」等、様々な変化する量を扱います。その時、意外と混乱するのが何から何を引かなければならないのか、ということです。これを整理しておきます。ここでの話は、後でとても重要になるので、こんな話があったな、と頭の隅に入れておいてください。

まず、「〇〇の変化量」を求めたいとき、「時間的に後の〇〇」から「時間的にはじめの〇〇」を引けば変化量が求まります。「後」から「はじめ」を引くということが重要で、引く順序を間違えてはいけません。増えたか減ったかに関係なく、必ずこの順序で引算をします。結果がプラスであれば増加、マイナスであれば減少、と理解してください。

「増加量」も計算方法は「変化量」と全く同じです。増加量を求めて、プラスであれば「増加した」ということですが、マイナスになったら「減少した」と理解してください。例えば、財布の中に朝、3000円入っていたとします。お小遣いをもらったり、コンビニで買い物したり、一日終わったところで夜、財布の中を見ると、4000円でした。この時、財布の中身の増加量の計算は、もちろん、「夜の財布の中の金額 - 朝の財布の中の金額」で増加量は「1000円」です。もし、夜、2500円になってたら、増加量は「マイナス500円」です。減った場合は増加量はマイナスで表します。

これらに対して、「減少量」を求めるときは引く順序が逆になります。「〇〇の減少量」を求めたいとき、「時間的にはじめの〇〇」から「時間的に後の〇〇」を引けば減少量が求まります。「はじめ」から「後」を引いて減少量を求めます。先程の例で言うと、減少量は、「朝の財布の中の金額 - 夜の財布の中の金額」で、夜、2500円になってたら減少量は500円で、もし夜、4000円になってたら、減少量は、マイナス1000円になります。引算の結果がプラスであれば減少した、マイナスであれば増加したと理解してください。引く順序を間違えないように気をつけましょう。



保存力



これから、力学的エネルギー保存の法則を導いていきますが、その前に1つ準備が必要です。力学的エネルギーが保存するのか、あるいは保存しないのかということに保存力と呼ばれる、ある特別な力が関係します。ここではまず保存力の話をします。

## 保存力

名前は難しそうに聞こえるかもしれませんが、名前の由来は、「力学的エネルギーを保存させる力」なので、保存力と呼ばれています。保存力である力には、重力や電気力、磁気力、弾性力（バネの力など）、万有引力などがあります。重力は万有引力と同じものと思ってもらってかまいません。中学、高校で学ぶ重力は地球表面付近の万有引力のことを指します（もう少し細かく言うと、地表付近の万有引力と地球の自転による遠心力の合力です）。

物体がある力を受けていて、その物体が出発点から別の点（終点）へ移動する間に、その力が物体にする仕事が、物体がたどる経路によらずに出発点と終点の位置だけで決まるとき、その力を保存力と言います。逆に言うと、保存力であれば、出発点と終点を決めると、出発点から終点まで物体が保存力を受けながらどんな経路でたどって移動しても、保存力がその物体にする仕事は同じ値になります。ある力がする仕事が経路によらないためには、その力はある条件を満たさなければなりません。これは大学で学ぶ内容なので、詳しくは触れませんが、力がある微分方程式を満たしていれば、その力がする仕事が経路によらないことが示せます。これを示すには大学で学ぶ数学が必要になりますが、この後の話には必要ないので、ここでは深くは触れないでおきましょう。とにかく、上で挙げた重力等の力はこの条件を満たす力なので、保存力であることが分かっています。

## 位置エネルギー

保存力であれば、その保存力に対応した「位置エネルギー」を定義することができます。それぞれの保存力に対応して、「重力による位置エネルギー」とか、「弾性力による位置エネルギー」とか、「電気力による位置エネルギー」、等と呼ばれる位置エネルギーが定義されます。位置エネルギーというのは、物体が存在する位置において、物体がその位置でもつエネルギーが定まるといふ、そんなエネルギーです。一般に位置エネルギーの定義は、「ある位置で物体がもつ位置エネルギーは、物体がその位置から基準の位置まで移動する間に保存力がする仕事」です。基準となる位置は、どこに定めても構いませんが、計算するとき少しでも手間が省ける位置を選ぶとよいです。保存力なので、その位置から基準の位置まで移動する間に、保存力がする仕事は経路によらず（どんな経路で移動しても）同じ値になります。つまり、基準の位置を終点としたとき、出発点を決めれば、基準の位置まで、どんな経路でたどっても保存力がする仕事は全て同じ値になるので、出発点で、ある定まったエネルギーを持つ、ということです。これが位置エネルギーです。思い出してもらおうと、エネルギーとは、「仕事をする能力」なので、出発点において、基準まで移動する間に保存力が位置エネルギーの分だけ物体に対して仕事をする能力を持っている、ということです。ある点から基準まで移動する間に保存力がする仕事が正の仕事ならこの点における位置エネルギーは正であり、もし保存力がする仕事が負ならこの点における位置エネルギーは負ということになります。例えば、重力による位置エネルギーの場合、基準より高い位置に物体があれば、基準の位置まで降りていく間に重力がする仕事は正なので、位置エネルギーは正となりますが、基準より低い位置にあれば、基準の位置まで昇っていく間に重力がする仕事は負なので、位置エネルギーは負となります。

## 保存力がする仕事

ここで、保存力についてもう少し話を続けます。出発点が決まれば、物体が基準まで移動する間に保存力がする仕事が変わるということと、保存力がする仕事が経路によらないということを利用して、1つ重要なことが言えます。次のことが言える理由を考えてみましょう。

『物体がある点 A から、ある点 B へ移動する間に保存力が物体にする仕事は、「A での位置エネルギー」 - 「B での位置エネルギー」に等しい。』

どうでしょうか？ ヒントは、保存力がする仕事は経路によらないので、A から基準まで移動する2つの経路で保存力がする仕事を考えてみる、ということです。1つは A から直接基準まで移動する経路、もう1つは A から B を経由して基準まで移動する経路です。どちらの経路で移動しても、保存力がする仕事は等しいはずで、「A → B → 基準」の場合、保存力がする仕事を「A → B」と、「B → 基準」に分けると、「B → 基準」の部分は、「B での位置エネルギー」に他なりません。一方、「A → 基準」の場合は「A での位置エネルギー」に他なりません。これを次のように書いてみましょう。

$$\text{「仕事 ( A → 基準 )」} = \text{「仕事 ( A → B )」} + \text{「仕事 ( B → 基準 )」}$$

なので、

$$\text{「A での位置エネルギー」} = \text{「仕事 ( A → B )」} + \text{「B での位置エネルギー」}$$

となります。というわけで、求めたかった、「A 点から B 点に移動する間に保存力がする仕事」すなわち「仕事 ( A → B )」は

「A での位置エネルギー」 - 「B での位置エネルギー」

となります（図 20）。今、A から B へ移動するので、「はじめ」が「A 点」、「後」が「B 点」なので、この引算は言い換えると、「A から B へ移動するときの位置エネルギーの減少量」となります。前の章で話しましたが、減少量を計算するときは「はじめの量」 - 「後の量」で求めるということをお出ししてください。

このことが、力学的エネルギー保存の法則を導出するときに重要となります。覚えておいてください。もう一度確認しておきます。

『ある点 A から、ある点 B へ移動する間に保存力がする仕事は、「A での位置エネルギー」 - 「B での位置エネルギー」に等しい。』

少し言い換えると、

『ある点 A から、ある点 B へ移動する間に保存力がする仕事は、A から B へ移動する際の位置エネルギーの減少量に等しい。』

です。式で表わせば

「仕事（A → B）」 = 「A での位置エネルギー」 - 「B での位置エネルギー」

です。

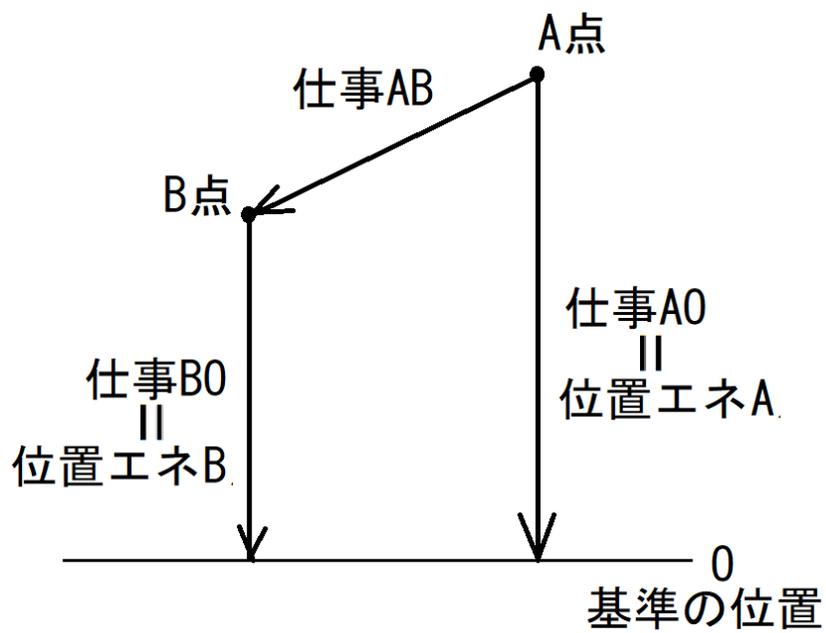


図 20 保存力のする仕事

運動エネルギーの変化量と仕事の関係



運動エネルギーを持っている物体（A）は、止まるまでの間に他の物体（B）に対して仕事をすることができます。これはエネルギーのところでも話したのですが、これと逆に運動エネルギーを持っている物体（A）に仕事をしてやると、物体（A）の運動エネルギーは変化します。同じ意味ですが、少し言い方を変えると、「物体（A）の運動エネルギーの変化量はその物体（A）がされた仕事に等しい」と言うことができます。

これは、作用反作用の法則を考えれば当然であることがわかります。動いている物体（A）が、他の物体（B）に対して仕事をするということは、他の物体（B）に対して力を及ぼしているわけで、その物体（B）から反作用の力を受けます。力の向きは、作用と反作用では逆向きで同じ大きさなので、自分（物体A）が他の物体（B）に対してした仕事と自分（物体A）が物体Bにされた仕事は逆符号の関係になります。まず、運動エネルギーを持っている物体（A）が他の物体（B）に対して仕事をすれば、その仕事の分だけ、物体Aの運動エネルギーは減少します。つまり「（物体Aの）運動エネルギーの減少量は他の物体（B）に対してした仕事に等しい」です。「（物体Aの）運動エネルギーの減少量」＝「他の物体（B）に対してした仕事」が成り立っています。自分（物体A）が他の物体（B）に対してした仕事と逆符号の仕事を自分はされているので、言い方を変えると、

「（物体Aの）運動エネルギーの減少量」＝「他の物体（B）に対してした仕事」＝－「自分（物体A）が物体Bにされた仕事」

なので、

「自分（物体A）がされた仕事」＝－「（物体Aの）運動エネルギーの減少量」＝「物体（A）の運動エネルギーの変化量」

という関係が成り立っていることになります。物体（A）に加えた力の向きに物体（A）が移動すれば物体（A）にした仕事は正の仕事であり、物体（A）はより速く動くことになります。物体（A）に加えた力の向きと逆向きに物体（A）が運動していれば、物体（A）にした仕事は負の仕事となるので、物体（A）の速さはより遅くなります。言い方を変えると、物体（A）に正の仕事をするれば運動エネルギーは増加し、負の仕事をすれば運動エネルギーは減少するということです。

ここで、物体（A）に対してした仕事は、どんな力がした仕事であってもこの関係は成り立ちます。すなわち、保存力であっても、保存力でない力であっても構いません。（保存力でない力としては、例えば摩擦力や手で加えた力等があります。）



## 力学的エネルギー保存の法則



次にこの本での目的としていた、力学的エネルギー保存の法則についてお話しします。力学的エネルギーが保存することは、ある条件が満たされれば、自動的に導出されます。そのあたりは、うまくつくられてるなあ、と思います。その前に、力学的エネルギーとは何かを説明しなければいけませんね。

## 力学的エネルギー

物体が運動しているとき、その物体は、「運動エネルギー」を持っています。そしてまた同時に、その物体が保存力を受けていれば（例えば重力や弾性力など）、「位置エネルギー」も持っています。その位置エネルギーは、物体の位置によって定まっています。位置が変われば、位置エネルギーも変わります。つまり物体は、各瞬間において「位置エネルギー」と「運動エネルギー」の両方を持っています。ただし、どちらかがゼロの場合もありますが、『各瞬間における、位置エネルギーと運動エネルギーを足したもの（和）』を力学的エネルギーと呼びます。ここで注意が必要ですが、このときに足す位置エネルギーと運動エネルギーは同じ瞬間のものでなければいけません。別々の瞬間における位置エネルギーと運動エネルギーを足しても、それは力学的エネルギーではありません。それは意味のないものなので、名前すらついていません。「同じ瞬間における位置エネルギーと運動エネルギーの和」のみ、力学的エネルギーと呼びます。ここで示す力学的エネルギー保存の法則は、物体が各瞬間に持っている位置エネルギーと運動エネルギーの和である力学的エネルギーこそが（ある条件の下で）保存されるということがポイントです。

## 出発点

ここまでで準備してきたことを改めて確認しておきます。

- ①物体に仕事をすると、その仕事の分だけ物体の運動エネルギーは変化する（物体の運動エネルギーの変化量は、物体にした仕事に等しい）
- ②移動において保存力がする仕事は、位置エネルギーの減少量に等しい

です。この2つがあれば、力学的エネルギーがある条件の下で保存されることを示せます。力学的エネルギーが（ある条件の下で）保存することを示す前に、どんな条件が必要か考えてみましょう。どうでしょうか？ どんな条件があれば力学的エネルギーが保存されるのでしょうか？ 少し考えてみてください。

導きたいことを確認しておきましょう。それは、

「物体が A 点から B 点へ移動するとき、力学的エネルギーが保存される」

ということです。力学的エネルギーが保存される条件を考える手助けとして、1つ確認しておきます。先程、ここまでで準備してきたことを確認しましたが、その1つめの①において、「物体に仕事をすると」と言っていますが、この仕事をする力は、保存力だろうが、保存力でない力だろうが、どんな力の場合であっても、その力がした仕事の分だけ運動エネルギーは変化します。

導くべきこと、すなわち力学的エネルギーが保存されるということは、（物体の運動による）移動において力学的エネルギーが変わらないということで、「出発点である A 点と終点である B 点での力学的エネルギーが等しい」ということです。これを、「運 A」 + 「位 A」 = 「運 B」 + 「位 B」と表します。ここで「運 A」や「位 A」は、「A 点における運動エネルギー」や「A 点における位置エネルギー」を簡略化して表したものです。B 点も同様です。とりあえず、条件は後で考えるとして、先に進んでみましょう。（条件はなんだろうか、という疑問を頭の片隅に置いて下さい。）



## 力学的エネルギー保存の法則及び保存の条件

出発点の1つめ①は、

①「物体の運動エネルギーの変化量は物体にした仕事に等しい」

です。このとき、物体がいくつかの力を受けているとき、これらの力がする仕事を、力ごとに求め、和をとれば、物体が受けている全ての力がした仕事になります。そこで、この仕事の和を、保存力がした仕事と、保存力以外の力がした仕事に分けます。つまり、「全仕事」＝「保存力がした仕事」＋「保存力以外の力がした仕事」と書けます。もう少し簡単に書くために、「保存がした仕事」を「仕保」と表し、そして「保存力以外の力がした仕事」を「仕他」と表しましょう。この簡略化した表し方を用いると、出発点の①は、  
「運動エネルギーの変化量」＝「仕保」＋「仕他」

と表せます。「運動エネルギーの変化量」は、「後」－「始め」なので、「A点」から「B点」に移動するとき、「運B」－「運A」です。一方、「仕保」は、「A点からB点へ移動する間に保存力がする仕事」なので、出発点②より位置エネルギーの減少量で表わせ、「位A」－「位B」と表わせます。

整理すると出発点の①は、

$$\text{「運B」} - \text{「運A」} = \text{「位A」} - \text{「位B」} + \text{「仕他」}$$

となります。この式において、左辺や右辺に点Aの量と点Bの量が混在しているので、これをちょっと移項して点Aの量と点Bの量を分けてみると、

$$\text{「運B」} + \text{「位B」} = \text{「運A」} + \text{「位A」} + \text{「仕他」}$$

となります。これで、力学的エネルギーが保存するための条件は見えるでしょうか？右辺の「仕他」がゼロであれば、「点Aでの力学的エネルギーと点Bでの力学的エネルギーが等しい」ことを表しているのが分かります。つまり、力学的エネルギーが保存するための条件は、『保存力以外の力がした仕事が0』ということです。そして『保存力以外の力がした仕事か0のとき、力学的エネルギーは保存される』ということになります。これが示したかったことです。

もう少しこの式を眺めてみましょう。もし、「仕他」が0でなければ、

$$\text{「力エネB」} = \text{「力エネA」} + \text{「仕他」}$$

となるので、移項すると

$$\text{「力エネB」} - \text{「力エネA」} = \text{「仕他」}$$

となります。ここで「力エネA」は「A点での力学的エネルギー」を簡略化して表したものです。B点も同様です。B点が後で、A点が始めなので、左辺は、「力学的エネルギーの変化量」になります。つまり、「保存力以外の力がした仕事の分だけ力学的エネルギーが変化する」ということになります。

まとめると、  
「仕他」 = 0 のとき力学的エネルギーは保存され、  
「仕他」 > 0 であれば力学的エネルギーは増加し、  
「仕他」 < 0 であれば力学的エネルギーは減少する

ということになります。



---

力学的エネルギー保存の仕組み

---

著 藤山篤司

制作 Puboo  
発行所 デザインエッグ株式会社

---