ゼノンのパラドックス--アキレスと亀の競走--について

genritomechanism

著作日時：　2018.12.10.月.　12:01:00　著作者、竹花　忠

ゼノンのパラドックス--アキレスと亀の競走--について：

　計算を単純化するために、アキレスの走行速度は秒速10メーター、亀の走行速度は秒速1メーター、そして、亀がアキレスよりも100メーター先の位置から競走を開始するものとす。

　すると、アキレスが亀に追いつく時間は、両者が同じ位置に位置した時である。つまり、アキレスと亀がともに同じ時間だけかけて、アキレスが秒速10メーターで移動した距離と、亀が秒速1メーターで移動した距離＋100メーター、が等しい値になった時である。であるから、その時の所要時間をxとして、10x = x + 100、の時に、アキレスは亀に追いついている。

　つまり、9x = 100

x = 100 ÷ 9 = 11.11・・・

　なので、アキレスは、11.11・・・秒後には亀に追いつき、それ以降は、亀よりも先行する。

　そのことは間違いない。

　それでいて、亀の位置までアキレスが追いついた時には亀は必ずその先に位置していて、そこにアキレスが追いついた時にも亀はさらにその先に位置していて、・・・・・、であるから、アキレスは亀を、絶対に・これを無限回繰り返しても、追い抜けない、という主張は、それは・その主張は、アキレスが亀よりも後ろにいる間だけに注目ししつづけている議論であることによる結論というか内容である。アキレスが亀よりりも後ろにいる間にだけ注目しつづければ、それは

確かに、アキレスは亀の後ろにい続けているのだから。
　ここで11.11・・・秒後には、アキレスは亀に追いつくことを思い出すと、そしてアキレスは秒速10メーターで走行することを思い出すと、10 × 11.11・・・　= 111.11・・・ であるから、アキレスの走破距離にして、111.11・・・メーターの位置ではアキレスは亀に追いつく。つまり、先のアキレスは亀の後ろに無限回にわたってい続けるという主張は、時間にして11.11・・・秒未満の間における出来事であるすべて。時間にして11.11・・・秒未満の範囲だけに注目した上での主張である、ということである。なぜなら、アキレスが亀の後ろにいることが成立しているのは、11.11・・・秒未満の時間範囲でだけなのだから。
　つまり距離にすれば、アキレスの走破距離にして、111.11・・・メーター未満の距離範囲に注目を限定した上での主張であると言える。
　それらのことから導かれるのは、100メーター、10メーター、1メーター、10センチメーター、1センチメーター、1ミリメーター、0.1ミリメーター、0.01ミリメーター、0.001ミリメーター、・・・と、10分の1倍ずつの距離を無限に累積すると、その距離は・その値は、無限に大きな値になるのではなく、111.11・・・メーターに極めて接近した値になるということである。
　なぜなら、111.11・・・メーターに達した時には、アキレスは亀に追いついてしまっている時なわけで、先の、亀のいた位置に至った時にはすでに亀はその先に移動している、ということの無限回の際における各回のアキレスの移動距離の無限個の累計は、決して、111.11・・・メーターには到達しないわけだから。しかし、先の方式の競走を繰り返しつづければ、亀

の方がアキレスより前にいることのできている限界の値にどんどんと接近してゆくわけではある。その限界の値は、アキレスが亀に追いついてしまった値の直前の値である。追いついてしまった値は111.11・・・メーターであるから、その直前の値は、111.11・・・メーター未満の中の最大値ということになる。

　なのでその値は、決して111.11・・・メーターには到達していいないが111.11・・・メーターに極めて接近した値ということである。

　つまり、無限に数値を累計するにしても、その累計する数値次第では、無限に大きな値になることもあれば、そうではなくて、今回のように、有限のある具体値になることもあるということである。

　数学的には、このアキレスの走破距離の累計値は、初項を100として、項比を0.1とする、等比数列の無限個の和、である。

　であるから、この等比数列の一般項をまず求めて、そして、それについての第n項までの和の式を求めて、そして、その式について、nを、∞・無限大、に接近させた値を求めれば、つまり、等比数列の和の極限値を求めれば、111.11・・・が求められる。

　等比数列の一般項は、初項×(項比の、(項数ー1)乗)、である。つまり、初項×項比 ^ (項数ー1)、である。つまり、第n項の時の値は、初項×項比 ^ (nー1)、である。

　なのでその第n項までの和は、∑のk=1からn、{初項×項比 ^ (kー1)}、である。

　この式の分母と分子に、項比ー1、をそれぞれ掛ける。

　ただし、ここで初項はa<1>、項比はr、で表記することにする。

　すると、先の第n項までの和の式は、∑のk=1からn、{a<1>×r ^ (kー1)}、と書ける。

　その分母、分子に、r - 1をそれぞれ掛けた式は、

∑のk=1からn、{a<1>×r ^ (kー1)}×(r - 1)/(r - 1)、である。

これはつまり、

∑のk=1からn、{a<1>・r ^ k ー a<1>・r ^ (kー1)}/(r - 1)、である。

これはつまり、

∑のk=1からn、{第k+1項 ー 第k項}/(r - 1)、である。

　初項・第1項、は、a<1>と表記したので、ここで・ここでは、第k+1項はa<k+1>と表記し、第k項は、a<k>と表記することにする。

　つまり、第n項までの等比数列の和の式は、

∑のk=1からn、{a<k+1> ー a<k>}/(r - 1)、である。

　これはつまり、{1/(r - 1)}∑のk=1からn、{a<k+1> ー a<k>}、である。

　これはつまり、

{1/(r - 1)}{(a<2> - a<1>)+(a<3> - a<2>) + (a<4> - a<3>) + (a<5> - a<4>) + ・・・ + (a<n-1> - a<n-2>) + (a<n> - a<n-1>) + (a<n+1> - a<n>)}、

である。
　これはつまり、和の式を逆順に並び替えて表記すると、
{1/(r - 1)}{(a<n+1> - a<n>)+(a<n> - a<n-1>)+(a<n-1> - a<n-2>)+・・・+(a<5> - a<4>)+(a<4> - a<3>)+(a<3>-a<2>)+(a<2>-a<1>)}、
であるから、これは結局、和の式の両端の値だけが残って、
{1/(r - 1)}{a<n+1> - a<1>}
である。
　つまり、等比数列の和の式は、{1/(r - 1)}{a<n+1> - a<1>}、ということである。
　これはつまり、
{a<n+1> - a<1>}/(r - 1)、で、分母、分子、にそれぞれー1を掛けて、つまり、
{a<1> - a<n+1>}/(1 - r)、である。
　そしてこれはつまり、
{a<1> - a<1>・r ^ n}/(1 - r)　= a<1>{1- r ^ n}/(1 - r)、である。
　ここでは、a<1>が100で、rが0.1である。

　従って、等比数列の和の式、a<1>{1- r ^ n}/(1 - r)、のnを無限大に接近させた時の極限値、ただし、a<1>に100、rに0.1を使用した時の値は、
100(1 - 0.1 ^ n)/(1 - 0.1)、の式において、nを無限大に接近させた時の値である。
　つまり、
lim(n->∞)、100(1 - 0.1 ^ n)/(1 - 0.1)、を求めればいい。
　nが∞に接近した時、0.1^n、は、0に極めて接近するので、結局、
lim(n->∞)、100(1 - 0.1^n)/(1 - 0.1) = 100 / (1 - 0.1) = 100 / 0.9 = 111.11・・・、となる。
　つまり、初項100、項比0.1の等比数列の無限個の和の値は、111.11・・・に極めて接近した値、ということである。
　つまり、初項100、項比0.1の等比数列の極限値は111.11・・・ということである。

　なお、対象となっている現象の所要時間と、その現象を点検検証するのに要する所要時間とは特定の関係で結ばれているわけではない。
　アキレスが秒速10メーターで走り、亀が秒速1メーターで走る。亀がアキレスの100メーター前方にいるところからスタートする。
　アキレスが亀の位置に到達した時には、亀はその10メーター先に移動している。ーー所要時

間は10秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその1メーター先に移動している。--所要時間は1秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその10センチメーター先に移動している。--所要時間は0.1秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその1センチメーター先に移動している。--所要時間は0.01秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその1ミリメーター先に移動している。--所要時間は0.001秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその0.1ミリメーター先に移動している。--所要時間は0.0001秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその0.01ミリメーター先に移動している。--所要時間は0.00001秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその0.001ミリメーター先に移動している。--所要時間は0.000001秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその0.0001ミリメーター先に移動している。--所要時間は0.0000001秒。
　アキレスがその亀の位置に到達した時には、亀はその0.00001ミリメーター先に移動している。--所要時間は0.00000001秒。

・

・
・
・

　上記は、亀が前にいて、アキレスがその後ろにいる状態の時だけについての点検で、最初100メーターの移動から開始して、次々にその10分の1の距離の移動を重ねる。そのような移動を無限回重ねるというものである。この無限回の、亀にアキレスが追いつけていない状態の成立は、アキレスが亀に追いつけてしまう時間、11.11・・・秒の直前までの範囲で成立している現象である。
　であるからこの現象の所要時間は、11.11・・・秒の直前まででである。
　しかしこの現象の、1ステップ・1段階1段階、の検証に1秒を要するとして、1万ステップを検証したなら、1万秒かかる。しかし検証の対象としているこの現象自体の所要時間は、11.11・・・秒の直前まででである。
　1ステップ・1段階1段階、の検証に6秒を要したなら、1万ステップの検証に、6万秒かかる。しかし検証の対象としている現象自体の所要時間は、11.11・・・秒の直前までのままである。
　というわけで、検証の所要時間は、何件の検証を実施するかそして1件の検証に要した所要時間次第で、その検証の総時間は決まる。そして、検証対象の現象自体の所要時間は、検証作業とは無関係に決まってくる。
　この例の場合、11.11・・・秒以内に展開される現象の中の、上記のような区切りでの移

動距離の無限回の累積値は、実は、111.11・・・メーターの直前である。
　つまり、この現象のすべての検証には、無限回を要するので、1回あたりの検証の所要時間が1兆分の1秒であるにしても、無限の時間がかかる。しかし、検証の対象である現象自体の所要時間は、わずかに11.11・・・秒の直前までの時間にすぎない。
　それから先の時間にあっては、アキレスが亀に追いつき、それは11.11・・・秒ちょうどの時であるが。そしてさらにその先にあっては、アキレスが亀よりも先に位置している。
　それが、ゼノンのパラドックスに述べられている、アキレスと亀の前述のような競走の話から言えることである。

　前記のステップで・前記の形式で、検証し続ける限りにあっては、検証時間をどれだけ費やしても無限の時間を費やしても、アキレスが亀を抜き去ったことは検証されない、亀の方がアキレスよりも前に位置している範囲内だけを移動して検証し続けるだけの検証方式であるのだから。検証対象における所要時間的にも検証対象におかける移動距離的にも、亀がアキレスの前に位置している範囲内だけでの時間的距離的移動しか、前記の検証方式では検証されないのだから。
　しかしこの競走の検証範囲を、上記の範囲を超えたところまで拡張すれば、つまり、時間にして、11.11・・・秒以上、距離にして、111.11・・・秒以上、までに検証範囲を拡張すれば、そしてその拡張した範囲内で検証を行えば、時間にして11.11・・・秒の時、距離にして111.11メーターの時なら、アキレスは亀に追いついていることが検証される。さらにそれよりも先の時点や先の距離の時なら、アキレスは亀よりも前に位置していることが検証される。

　検証対象の事象の11.11・・・秒以内のことばかりを、前記の検証ステップによって検証しつづけるから、検証の所要時間をどれだけかけても、検証の回数をどれだけ増やしても、亀がアキレスよりも前にいるという結論ばかりが出てくる。前記の検証ステップは・前記の検証方式は、特定の結論となる範囲だけを検証範囲に限定してしまっている、検証ステップ・検証方式、である・なのである。
　だからどれだけ、その方式で・そのステップで、検証回数を重ねても、検証時間を費やしても、その検証からの結論は、亀が前でアキレスが後ということばかりになる。
　しかし、アキレスと亀の競走の範囲を、時間にして11.11・・・秒以上に拡張して検証を行えば、距離にして111.11・・・メーター以上に拡張して検証を行えば、その拡張した範囲で検証を行えば、その範囲での検証を行っただけで、亀が前でアキレスが後ろであるという以外の結論が得られる。
　アキレスは永遠に亀を追い抜けないということはない。アキレスは、11.11・・・秒以上、亀と競走を続ければ、亀に追いつき追い越せる。アキレスは111.11・・・メーター以上、亀と競走を続ければ、亀に追いつき追い越せる。
　アキレスが亀よりも後ろにいる時間範囲内だけを、アキレスが亀よりも後ろにいる走行距離の範囲内だけを、どれだけ検証しても、無限回検証しても、その場合の結論は、常に、亀がアキレスよりも前にいる、となる。そのことのもとに、無限回にわたって、亀がアキレスの前にいる、と結論される、ということは言える。またそのような検証を続ける限り、検証時間にあっては、永遠の時間にわたって、亀がアキレスよりも前にいる、という結論が得られ続ける。ということ

は言える。
　しかし、アキレスと亀の競走の所要時間においては、永遠の時間にわたって、亀がアキレスよりも前であり続けるということは言えない。亀がアキレスよりも前にいる時間は、競走の開始から11.11・・・秒の直前までだけである。